Contrôle ✎

NOM et PRÉNOM :

Corrigé.

Pour chaque exercice, une référence à un exercice analogue dans le cours est faite : l'objectif est que vous preniez conscience au plus vite, si ce n'est pas encore le cas, qu'un contrôle se prépare en retravaillant les exercices du cours jusqu'à leur parfaite connaissance. Les exercices du cours ne sont pas donnés au hasard, ils vous permettent d'apprendre les techniques à maîtriser, ce sont donc ces mêmes exercices que vous retrouverez dans les contrôles.

Exercice 1 (3 points) –

1. Donner la mesure en degrés correspondant à $\frac{\pi}{5}\,\text{rad}$.
2. Donner la mesure en radians correspondant à $72°$.
3. Vous savez depuis plusieurs années que «la somme des mesures en degrés des angles d'un triangle est toujours égale à $180°$». Reformulez cette propriété en utilisant les mesures en radians.

Résolution.

Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 1 à 4.

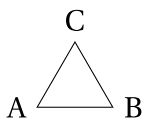
On répond à ces questions en se souvenant des deux points suivants :

- Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés.
- $180° = \pi\,\text{rad}$.

1. $\frac{\pi}{5}\,\text{rad} = \left(\frac{180}{5}\right)° = 36°$.
2. $72° = 2 \times 36° = 2 \times \frac{\pi}{5}\,\text{rad} = \frac{2\pi}{5}\,\text{rad}$.
3. «La somme des mesures en radians des angles d'un triangle est toujours égale à $\pi\,\text{rad}$».

Exercice 2 (2 points) –

On considère le triangle équilatéral ABC représenté ci-contre



1. Donnez la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right)$.
2. Donnez la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)$.

Résolution.

Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 5 et 6.

Vous savez depuis longtemps que les trois angles d'un triangle équilatéral ont même mesure. Cette mesure commune est $\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$ (vous retrouvez cela soit en prenant le tiers de la somme des angles du triangle, cette somme valant π comme rappelé dans l'exercice précédent, soit en vous rappelant que cette mesure vaut $60°$ et en transformant cette mesure en radians).

Il ne vous reste plus qu'à tenir compte du sens de rotation pour répondre aux deux questions.

1. $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{-\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
2. $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

Exercice 3 (3 points) –
Attention à clairement justifier vos réponses.

1. Les nombres $a = \dfrac{\pi}{5}$ et $b = \dfrac{6\pi}{5}$ sont-ils mesures (en rad) d'un même angle de vecteurs ?
2. Les nombres $c = \dfrac{3\pi}{4}$ et $d = \dfrac{-5\pi}{4}$ sont-ils mesures (en rad) d'un même angle de vecteurs ?
3. Les nombres $u = 0$ et $v = 666\pi$ sont-ils mesures (en rad) d'un même angle de vecteurs ?

Résolution.
Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 8.
On répond à ces questions en se remémorant ce qui caractérise le fait que des réels correspondent aux mêmes mesures : a et b sont mesures d'un même angle orienté de vecteurs si et seulement si leur différence peut s'écrire $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. $$\begin{aligned} b - a &= \frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5} \\ &= \frac{5\pi}{5} \\ &= \pi \end{aligned}$$
   Il n'y a donc qu'un «demi-tour» de différence : a et b ne correspondent pas à un même angle.
2. $$\begin{aligned} d - c &= \frac{-5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{-8\pi}{4} \\ &= -2\pi \end{aligned}$$
   Un tour complet de différence : il s'agit bien de deux mesures d'un même angle.
3. $$v - u = 333 \times 2\pi$$
   333 tours de différence : il s'agit bien de deux mesures d'un même angle.

Exercice 4 (3 points) –

1. Donner la mesure principale associée à la mesure d'angle $\dfrac{11\pi}{6}$.
2. Donner la mesure principale associée à 5π.

3. Donner la mesure principale associée à $\dfrac{-5\pi}{4}$.

Résolution.
Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 9.
La mesure principale d'un angle est sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. Pour trouver la mesure principale associée, on part donc de la mesure proposée et on ajoute ou enlève des tours jusqu'à tomber dans le bon intervalle. Plus précisément :

- Si la mesure proposée est plus grande que π, on lui enlève 2π autant de fois que nécessaire pour «tomber» dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
- Si la mesure donnée est au plus $-\pi$, on lui ajoute 2π autant de fois que nécessaire pour «tomber» dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

1.

$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{6} - 2\pi &= \frac{11\pi}{6} - \frac{12\pi}{6}\\ &= \frac{-\pi}{6}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{-\pi}{6} \in\ ]-\pi\ ;\ \pi]$, il s'agit de la mesure principale associée à $\dfrac{11\pi}{6}$.

2. $5\pi - 2\times 2\pi = \pi$. La mesure principale associée à 5π est donc π.

3.

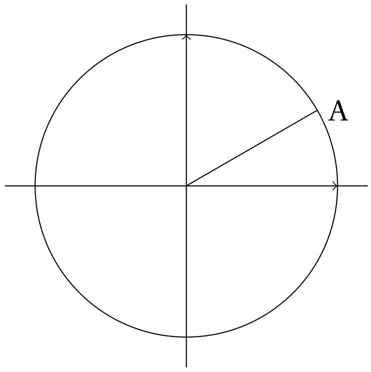
$$\begin{aligned}\frac{-5\pi}{4} + 2\pi &= \frac{-5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{3\pi}{4} \in\ ]-\pi\ ;\ \pi]$, il s'agit de la mesure principale associée à $\dfrac{-5\pi}{4}$.

Exercice 5 (3 points) –
Soit $x \in\ ]-\pi\ ;\ 0[$ tel que $\cos(x) = 0{,}3$. Quelle est la valeur de $\sin(x)$?

Résolution.
Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 14 et 15.
On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on en déduit que $\sin^2(x) = 1 - 0{,}3^2$. On a donc soit $\sin(x) = +\sqrt{0{,}91}$, soit $\sin(x) = -\sqrt{0{,}91}$.
Par ailleurs, l'énoncé nous dit que $x \in\ ]-\pi\ ;\ 0[$: le sinus de x est donc négatif. On a donc $\boxed{\sin(x) = -\sqrt{0{,}91}}$.

Exercice 6 (3 points) –
Le point A placé sur le cercle ci-dessous est associé à la mesure d'angle $\dfrac{\pi}{6}$. On rappelle que ce point A a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.



Complétez les phrases :

1. Le point B symétrique de A par rapport à l'origine du repère a pour coordonnées : ……… et est associé à la mesure d'angle …
2. Le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses a pour coordonnées : ……… et est associé à la mesure d'angle …
3. Le point D symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées a pour coordonnées : ……… et est associé à la mesure d'angle …

Résolution.
Exercices du cours de ce type : le(s) numéro(s) 10, 11.

1. Le point B symétrique de A par rapport à l'origine du repère a pour coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\right)$ et est associé à la mesure d'angle $\frac{\pi}{6} - \pi = \frac{-5\pi}{6}$.
2. Le point C symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\right)$ et est associé à la mesure d'angle $\frac{-\pi}{6}$.
3. Le point D symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées a pour coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et est associé à la mesure d'angle $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 7 (3 points) –
Soit x un nombre réel quelconque. Compléter en exprimant les membres gauches en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ (en d'autres termes, compléter par les formules du cours !) :

1. $\cos(-x) = \ldots$
2. $\sin(-x) = \ldots$
3. $\cos(\pi - x) = \ldots$
4. $\sin(\pi - x) = \ldots$
5. $\cos(\pi + x) = \ldots$
6. $\sin(\pi + x) = \ldots$

Résolution.
Il s'agit d'une question de cours.

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$
3. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
5. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
6. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Exercice 8 (bonus, hors barème) –
Donner **tous** les nombres réels x tels que $\sin(x) = 0{,}5$.

Résolution.
D'après le cours, on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$. Sur le cercle, on trouve un second point de même ordonnée, qui correspond à l'angle $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
Les réels solutions sont donc les réels $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et les réels $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.