Contrôle ✎

NOM et PRÉNOM :

Barème sur 20 points.

Calculatrice interdite.

Exercice 1 (2 points) –

1. Donner la mesure en degrés correspondant à $\frac{\pi}{8}$ rad.
2. Donner la mesure en radians correspondant à $120°$.

Résolution.

1.

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\,\text{rad} &= \left(\frac{180}{8}\right)^\circ\\ &= \left(\frac{18\times 10}{2\times 2\times 2}\right)^\circ\\ &= \left(\frac{2\times 9\times 2\times 5}{2\times 2\times 2}\right)^\circ\\ &= \left(\frac{9\times 5}{2}\right)^\circ\\ &= \left(\frac{45}{2}\right)^\circ\\ &= 22{,}5^\circ\end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\,\text{rad} &= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\,\text{rad}\\ &= \frac{1}{2}\times 45^\circ && \text{C'est une valeur de référence du cours !}\\ &= 22{,}5^\circ\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}120^\circ &= 2\times 60^\circ\\ &= 2\times\frac{\pi}{3}\,\text{rad} && \text{C'est une valeur de référence du cours !}\\ &= \frac{2\pi}{3}\,\text{rad}\end{aligned}$$

Exercice 2 (2 points) –
Dans un repère orthonormé du plan, on définit $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 1)$ et $D(0\ ;\ 1)$.

1. Donnez la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right)$.
2. Donnez la mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right)$.

Résolution.
Vous savez depuis longtemps que les angles géométriques d'un carré sont des angles droits, c'est à dire des angles de $90°$ ou encore $\frac{\pi}{2}$ rad. Il ne vous reste plus qu'à tenir compte du sens de rotation pour répondre aux deux questions.

1. $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
2. $\left(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DC}\right) = +\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Exercice 3 (2 points) –
Attention à clairement justifier vos réponses.

1. Les nombres $a = \frac{\pi}{10}$ et $b = \frac{-9\pi}{10}$ sont-ils mesures (en rad) d'un même angle de vecteurs ?
2. Les nombres $c = \frac{\pi}{13}$ et $d = \frac{27\pi}{13}$ sont-ils mesures (en rad) d'un même angle de vecteurs ?

Résolution.
On répond à ces questions en se remémorant ce qui caractérise le fait que des réels correspondent aux mêmes mesures : a et b sont mesures d'un même angle orienté de vecteurs si et seulement si leur différence peut s'écrire $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1. $a - b = \frac{\pi}{10} - \frac{-9\pi}{10} = \frac{10\pi}{10} = \pi$. Cette différence n'est pas de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc a et b ne sont pas mesures d'un même angle orienté de vecteurs.
2. $c - d = \frac{\pi}{13} - \frac{27\pi}{13} = \frac{-26\pi}{13} = -2\pi$. Cette différence est de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc c et d sont mesures d'un même angle.

Exercice 4 (3 points) –
Attention **à justifier** vos réponses (calcul…)

1. Donner la mesure principale associée à la mesure d'angle $\frac{-28\pi}{15}$.
2. Donner la mesure principale associée à $\frac{11\pi}{8}$.

Résolution.
La mesure principale d'un angle est sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. Pour trouver la mesure principale associée, on part donc de la mesure proposée et on ajoute ou enlève des tours jusqu'à tomber dans le bon intervalle. Plus précisément :

- Si la mesure proposée est plus grande que π, on lui enlève 2π autant de fois que nécessaire pour «tomber» dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
- Si la mesure donnée est au plus $-\pi$, on lui ajoute 2π autant de fois que nécessaire pour «tomber» dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

  1.
  $$\begin{aligned}\frac{-28\pi}{15}+2\pi &= \frac{-28\pi}{15}+\frac{30\pi}{15}\\ &= \frac{2\pi}{15}\end{aligned}$$
  La mesure principale cherchée est donc ici $\frac{2\pi}{15}$.

  2.
  $$\begin{aligned}\frac{11\pi}{8}-2\pi &= \frac{11\pi}{8}-\frac{16\pi}{8}\\ &= \frac{-5\pi}{8}\end{aligned}$$
  La mesure principale cherchée est donc ici $\frac{-5\pi}{8}$.

Exercice 5 (3 points) –

Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ tel que $\sin(x) = 0{,}7$.

1. Donner le signe de $\cos(x)$ (en justifiant).
2. Quelle est la valeur de $\cos(x)$?

Résolution.

1. $\cos(x) < 0$ car $x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$.
2. On sait que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$, on en déduit que $\sin^2(x) = 1-0{,}7^2$. On a donc soit $\cos(x) = +\sqrt{0{,}51}$, soit $\cos(x) = -\sqrt{0{,}51}$. On a donc $\cos(x) = -\sqrt{0{,}51}$ en tenant compte de la réponse à la question précédente.

Exercice 6 (4 points) –

Pour chacune des équations ci-dessous,

a) Donner les deux valeurs de x de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ (c'est à dire les mesures principales d'angles) vérifiant $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

b) Donner les deux valeurs de x de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ vérifiant $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Résolution.

a) D'après le cours, on sait que $x = \frac{\pi}{3}$ convient. Comme $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout réel x, le second rée qui convient est $-\frac{\pi}{3}$.

b) D'après le cours, $x = \frac{\pi}{4}$ convient. Comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout réel x, on en déduit que le réel $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ est la seconde solution cherchée.

Exercice 7 (4 points) –

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Compléter :
   a) $\frac{\pi}{10} - \pi = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\pi - \frac{\pi}{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. Donner, en **citant la formule utilisée**, les valeurs de :
   a) $\cos\left(\frac{-9\pi}{10}\right)$. b) $\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$. c) $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

Résolution.

1. a) $\frac{\pi}{10} - \pi = \frac{-9\pi}{10}$ b) $\pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$
2. (a) Comme $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$ pour tout x, on a $\cos\left(\frac{-9\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

   (b) Comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ pour tout x, on a $\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   (c) Comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ pour tout x, on a$\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 8 (bonus, hors barème) –

On rappelle la définition de la tangente :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Donner des nombres réels x tels que $\tan(x) = 1$. Essayez de les donner tous.

Résolution.

On cherche les réels x tels que $\sin(x) = \cos(x)$. Avec le cours, on sait $x = \frac{\pi}{4}$ convient, et donc également $x = \frac{-3\pi}{4}$. Les nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et les nombres $\frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $\tan(x) = 1$.