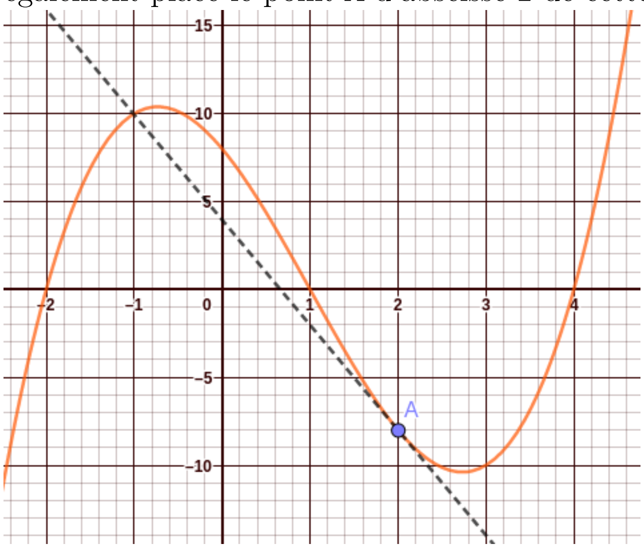
Fonction f' dérivée d'une fonction f

Les paragraphes I et II rappellent ce que vous avez vu en décembre.
Le paragraphe III présente un formulaire à apprendre par coeur, ce formulaire évitera de repasser par le calcul de taux de variations pour connaître les nombres dérivés.
Enfin le paragraphe V présente ce qui est en lycée l'application essentielle de la notion de dérivée : la détermination des variations d'une fonction f via l'étude des signes des nombres $f'(x)$.

I Nombre dérivé

Exercice 1 – La courbe de la fonction $f : x \longmapsto (x-1)(x+2)(x-4)$ est représentée ci-dessous. On a également placé le point A d'abscisse 2 de cette courbe et la tangente en A à cette courbe.



On rappelle que la tangente en A à une courbe est une droite qui passe par A et qui présente la même «pente» que la courbe en A. Cela donne comme sur cette représentation une droite qui, localement au voisinage du point A, semble se confondre avec la courbe (bien qu'en réalité il n'y ait, souvent, que le point A qui soit commun à la courbe et à la tangente).

1. Lire graphiquement les coordonnées du point A.
2. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente en A.
3. En déduire l'équation de la tangente en A.

En donnant à la notion de tangente la signification intuitive décrite ci-dessus, on retiendra le vocabulaire :

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Soit $\mathrm{A}\big(a\ ;\ f(a)\big)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. Le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$ est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in \mathrm{I}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $\mathrm{A}(a\ ;\ f(a))$ est caractérisée par :

— son coefficient directeur $f'(a)$

— et le fait qu'elle passe par le point $\mathrm{A}(a\ ;\ f(a))$.

Théorème (rappel).
La droite tangente à la courbe de f au point $\mathrm{A}(a\ ;\ f(a))$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Preuve.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente. Comme la tangente passe par $\mathrm{A}(a\ ;\ f(a))$, soit $\mathrm{M}(x; y)$ un point de cette tangente, distinct de A, on a : $f'(a) = \dfrac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}}$, soit $f'(a) = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$, d'où $f'(a)(x-a) = y - f(a)$ ou encore $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$. □

II Nombre dérivé : limite d'un taux de variation

En décembre, vous avez vu comment obtenir un nombre dérivé comme limite d'un taux de variation (en d'autres termes : la pente de la tangente en $\mathrm{A}(a\ ; f(a))$ est la limite des pentes des sécantes (AB) quand B se rapproche de A).
Rappel de la technique pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$:

1. Soit a un réel. On calcule le taux de variation de f entre a et le nombre $b = a+h$ (c'est à dire le coefficient directeur de la droite passant par $\mathrm{A}(a\ ;\ f(a))$ et $\mathrm{B}(b\ ;\ f(b))$) :

$$\begin{aligned}
\tau_f(a;b) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
&= \frac{b^2-a^2}{b-a} \\
&= \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} \\
&= b+a \\
&= a+h+a
\end{aligned}$$

2. On détermine en fonction de a le nombre obtenu lorsque le point B est très proche du point A, c'est à dire lorsque b est un nombre très proche de a, c'est à dire lorsque $h \approx 0$.
   Comme on a obtenu $\tau_f(a; a+h) = 2a+h$, la pente de cette sécante (AB) est très proche de $2a$ lorsque $h \approx 0$.

3. On conclut :

Théorème.
La fonction $f\colon x \longmapsto x^2$ est dérivable en tout réel a et $f'(a) = 2a$.

III Nombre dérivé pour quelques fonctions de référence

On peut obtenir ainsi l'expression des pentes de courbes usuelles en un point d'abscisse x :

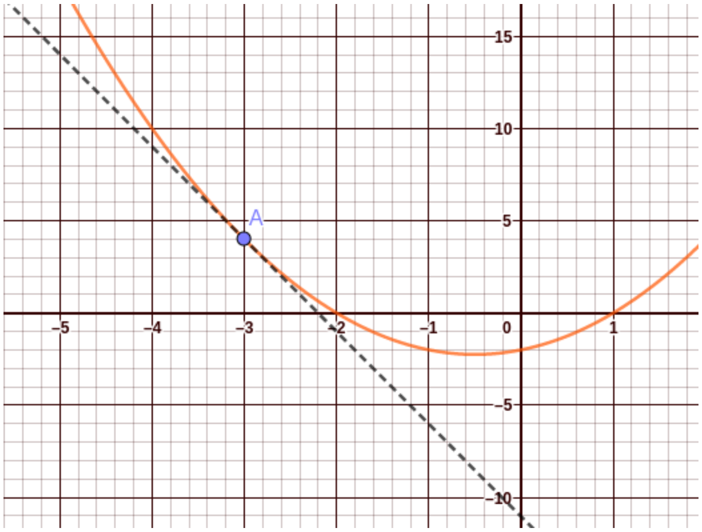
Propriété (formulaire à savoir par coeur).

1. La fonction $f\colon x \longmapsto x^2$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x$.
2. La fonction $f\colon x \longmapsto x^3$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2$.
3. La fonction $f\colon x \longmapsto mx + p$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = m$.
4. La fonction constante $f\colon x \longmapsto p$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 0$ (c'estun cas particulier du point précédent : une fonction constante peut être vue comme une fonction affine avec $m = 0$).
5. Une fonction polynôme du second degré $f\colon x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2ax + b$.
6. Une fonction polynôme du troisième degré $f\colon x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ est dérivable en tout réel x et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Remarque
La fonction $f'\colon x \longmapsto f'(x)$ qui associe à x le nombre dérivé en x (pour chaque x pour lequel ce nombre dérivé existe) est nommée fonction dérivée de f.

IV Exercices

Exercice 2 – Ci-dessous, la fonction $f : x \longmapsto x^2 + x - 2$ est représentée graphiquement ainsi que sa tangente au point d'abscisse -3.



1. Lire graphiquement la valeur du nombre dérivé de f en -3.
2. Retrouver la valeur du nombre $f'(-3)$ à l'aide du calcul du taux $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$. Vous vérifierez pour cela que l'on a :
$$\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=-5+h$$
3. Retrouver la valeur du nombre $f'(-3)$ à l'aide de la formule donnant l'expression de $f'(x)$ en fonction de x (cf formulaire donné plus haut).

Résolution.

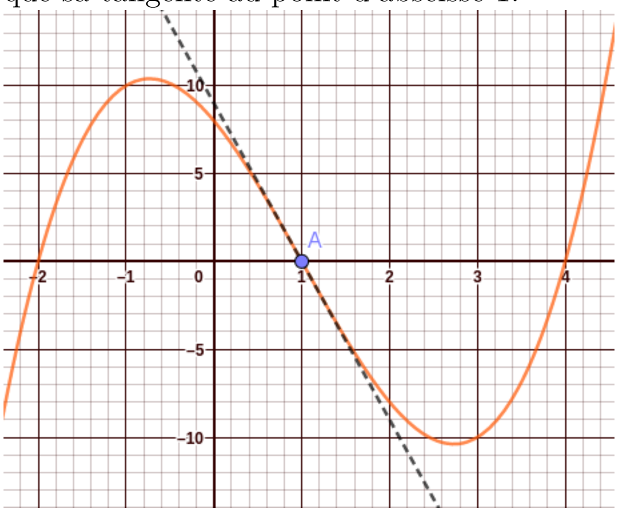
1. Le nombre dérivé de f en -3 est le coefficient directeur de la tangente en -3. Le point $\mathrm{A}(-3\ ;\ 4)$ et le point $\mathrm{B}(-2\ ;\ -1)$ sont deux points de cette tangente, qui a donc pour pente le nombre $f'(-3)=\dfrac{y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}}$, soit $f'(-3)=-5$.
2. Le taux :

$$\begin{aligned}
\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} &= \frac{\left((-3+h)^2+(-3+h)-2\right)-\left((-3)^2+(-3)-2\right)}{h}\\
&= \frac{\left((-3+h)^2+(-3+h)\right)-\left((-3)^2+(-3)\right)}{h}\\
&= \frac{\left(9-6h+h^2+(-3+h)\right)-(9+(-3))}{h}\\
&= \frac{9-6h+h^2-3+h-6}{h}\\
&= \frac{-5h+h^2}{h}\\
&= \frac{h(-5+h)}{h}\\
&= -5+h
\end{aligned}$$

Lorsque $h \approx 0$, on a donc $\dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h} \approx -5$, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = -5$. On a ainsi retrouvé $\boxed{f'(-3) = -5}$.

3. On a, pour tout réel x : $f'(x) = 2x+1$. D'où $f'(-3) = 2\times(-3)+1$, soit $f'(-3) = -5$. □

Exercice 3 – Ci-dessous, la fonction $f : x \longmapsto (x-1)(x+2)(x-4)$ est représentée graphiquement ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Lire graphiquement la valeur du nombre dérivé de f en 1.
2. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1 ?
3. (a) Développer l'expression de $f(x)$.
   (b) En déduire $f'(x)$ en fonction de x.
   (c) Confirmer la valeur de $f'(1)$ par le calcul.

Exercice 4 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$.

1. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. **Remarque :** on traduira cette question plus brièvement par «dériver f».
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 3, c'est à dire le nombre $f'(3)$.
3. Donner le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -5.

Exercice 5 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + x + 7$.

1. Dériver f.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 0.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{2}{5}x^2 + 1$.

1. Dériver f.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en -1.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

V Variations d'une fonction

V.1 Le théorème « liens SD VF »

Nous avons vu que $f'(x)$ est la «pente», l'«inclinaison» de la courbe au point d'abscisse x. Et comme pour les droites, une pente négative traduit une «descente», une pente positive traduit une «montée»(montée et descente s'entendent, comme d'habitude, avec l'idée que l'on se balade sur la courbe de la gauche vers la droite ou plus exactement, dans le sens croissant des abscisses).
Plus précisément :

Théorème (« liens SD VF » : liens entre signe de la dérivée et variations de la fonction).
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$, alors f est strictement croissante sur J.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$, alors f est strictement décroissante sur J.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$, alors f est constante sur J.

On peut préciser un peu :

Théorème (« liens SD VF » : liens entre signe de la dérivée et variations de la fonction).
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J.

- Si $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$ sauf en un nombre fini de réels de J pour lesquels on peut avoir $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur J.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$ sauf en un nombre fini de réels de J pour lesquels on peut avoir $f'(x) = 0$, , alors f est strictement décroissante sur J.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout réel $x \in \mathrm{J}$, alors f est constante sur J.

Retenez ce théorème en retenant l'explication donnée ci-dessus en terme de pente. *Pour démontrer ce théorème, on s'appuierait sur le théorème vu au trimestre 1 faisant le lien entre les variations d'une fonction et les signes des taux de variations de cette fonction.*

V.2 Exemples

Dans le cas d'une fonction affine $f: x \longmapsto mx + p$, vous savez que le signe de m permet de savoir s'il s'agit d'une fonction croissante ou décroissante. Dans les exemples ci-dessous, on constate que l'on peut retrouver ce résultat à partir du théorème « liens SD VF » :

1. Soit f la fonction $x \longmapsto -5x+3$. On a $f'(x) = -5$ pour tout réel x. Donc $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème « liens SD VF » permet donc d'affirmer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction $x \longmapsto 7x-12$. On a $f'(x) = 7$ pour tout réel x. Donc $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Le théorème « liens SD VF » permet donc d'affirmer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

V.3 Rappels sur les signes de fonctions de référence

Pour utiliser ce théorème *liens SD VF*, nous aurons besoin d'étudier les signes de certaines fonctions. On s'appuiera pour cela sur les rappels ci-dessous :

Théorème (RSFA : règle des signes d'une fonction affine).
Soit $f\colon x \longmapsto mx+p$ une fonction affine (avec $m \neq 0$). Le tableau des signes de f est :

x	$-\infty$		$\frac{-p}{m}$		$+\infty$
signe de $mx+p$ (avec $m \neq 0$)		signe de -m	0	signe de +m	

Théorème (RST : règle des signes d'un trinôme).
Soit $f\colon x \longmapsto ax^2+bx+c$ un trinôme.
$f(x)$ a le signe de a sauf entre les racines de f.

V.4 Exercices

Exercice 7 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+3x^2-9x+3$.

1. Vérifier que l'on $f'(x) = 3(x-1)(x+3)$ pour tout réel x.
2. Dresser le tableau des signes de f'.
3. En déduire les variations de f à l'aide du théorème « liens SD VF ».
4. Représenter graphiquement f sur votre calculatrice et vérifier que l'affichage obtenu est en adéquation avec votre tableau de variations.

Exercice 8 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3+1{,}5x^2+6x+1$.

1. Dériver f.
2. Vérifier que 2 est racine de f'. En déduire la seconde racine de f'.
3. Dresser le tableau des signes de f'.
4. En déduire les variations de f à l'aide du théorème « liens SD VF »
5. Représenter graphiquement f sur votre calculatrice et vérifier que l'affichage obtenu est en adéquation avec votre tableau de variations.

Exercice 9 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-16{,}5x^2+72x+5$.

1. Vérifier que $f'(x) = 3(x-3)(x-8)$ pour tout réel x.
2. Dresser le tableau des signes de f'.
3. En déduire les variations de f.
4. Représenter graphiquement f sur votre calculatrice et vérifier que l'affichage obtenu est en adéquation avec votre tableau de variations.

Exercice 10 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

1. Dériver f.
2. Dresser le tableau des signes de f'.
3. En déduire les variations de f.
4. Représenter graphiquement f sur votre calculatrice et vérifier que l'affichage obtenu est en adéquation avec votre tableau de variations.

Exercice 11 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f à l'aide des outils étudiés sur le chapitre «second degré ».
2. Retrouver les variations de f à l'aide du théorème « liens SD VF ».

Exercice 12 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de f à l'aide des outils étudiés sur le chapitre «second degré ».
2. Retrouver les variations de f à l'aide du théorème « liens SD VF ».

Exercice 13 – Un placard a la forme d'un parallélépipède rectangle. Au sol, les mesures sont x (en dm) et $12-x$. La hauteur est $12-x$ également.

1. Vérifier que le volume de ce placard est $\mathrm{V}(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$.
2. Vérifier que 4 et 12 sont racines de V'.
3. En déduire une forme factorisée de V' puis le tableau des signes de V'.
4. Quelle valeur donner à x pour que le volume obtenu soit maximal ? Quel est alors le volume ?