

Fréquences, Tableaux croisés

1 Quelques rappels sur les ensembles et les fréquences.

1.1 Fréquence

Notation.

Soit E un ensemble. On notera $\#(E)$ le nombre d'éléments de cet ensemble. Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé **effectif** de cet ensemble, ou encore **cardinal** de cet ensemble.

Soit par exemple E l'ensemble des élèves d'une classe. Si cette classe compte 25 élèves, on notera $\#(E) = 25$.

Définition.

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle proportion de A dans E ou encore fréquence de A dans E , le nombre $f_E(A) = \frac{\#(A)}{\#(E)}$.

Exercice 1 – En 2017, Peugeot a vendu 1,87 million de voitures pour particulier. Cela représente environ 85,7% des ventes de véhicule de Peugeot (le reste comprenant des utilitaires par exemple). Quel est le nombre total de véhicules vendus par Peugeot en 2017 ?

Remarque (rappel)

Soit A une partie d'un ensemble E . Lorsqu'on écrit que le nombre d'éléments de A représente $t\%$ du nombre d'éléments de E , on donne en fait la fréquence (ou proportion) de A dans E : $f_E(A) = \frac{\#(A)}{\#(E)} = t\% = \frac{t}{100}$. On a donc

$$\#(A) = \frac{t}{100} \times \#(E).$$

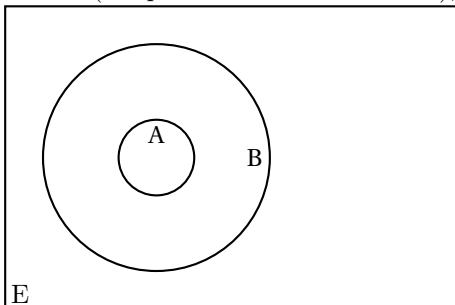
Exercice 2 – L'aire de la surface de la Terre est de 510 millions de km^2 . L'aire des océans et mers est de 362 millions de km^2 .

1. Quelle est la proportion de la surface totale occupée par la surface des mers et océans ?
2. La surface de l'océan Pacifique représente 46% de la surface des océans et mers. Quelle est l'aire de la surface de l'océan Pacifique ?

1.2 Inclusion, proportion de proportion

Définition.

Soient A et B deux parties de E . Si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B , on dit que A est inclus dans B (ou que A est contenu dans B), et on écrit $A \subset B$.



Remarque

Attention à ne pas confondre les symboles \in et \subset . Une partie (ou sous-ensemble) B d'un ensemble E est constituée d'éléments. Chaque élément e de la partie B appartient à B , ce que l'on note $e \in B$. \in est donc un symbole qui s'utilise avec, à sa gauche un élément, et à sa droite un ensemble. Tandis que le symbole \subset s'utilise avec un ensemble à gauche et un ensemble à droite. $A \subset B$ signifie que toute la partie A est contenue dans la partie B .

Vous pouvez voir ça en terme de sacs contenant des jouets par exemple. Un jouet appartient au sac (symbole \in). Mais si à l'intérieur d'un grand sac à jouets B , je place un plus petit sac à jouets A , on aura $A \subset B$ (qui signifie que tout jouet se trouvant dans le sac A se trouve du coup également dans le sac B).

L'écriture $e \in A$ se lit donc : « l'élément e appartient à l'ensemble A » tandis que l'écriture « $B \subset A$ » se lit : « l'ensemble B est une partie de l'ensemble A » (ou l'ensemble B est contenu dans l'ensemble A , ou encore l'ensemble B est inclus dans l'ensemble A , ou encore l'ensemble B est un sous-ensemble de l'ensemble A).

Exemples.

1. Prenons deux points P et Q sur une droite d . Les points P et Q sont des éléments de la droite d : $P \in d$, $Q \in d$. Mais le segment $[PQ]$, lui-même ensemble de points, est une partie, un sous-ensemble de d : $[PQ] \subset d$.
2. Prenons l'ensemble \mathcal{C} des élèves d'une classe de STL. Chaque élève est un élément de cet ensemble (par exemple, on écrira Amandine $\in \mathcal{C}$). Le groupe des garçons G de la classe est une partie, un sous-ensemble de la classe : $G \subset \mathcal{C}$.

Exercice 3 – Dans une classe, 38% des élèves sont des garçons. Parmi ces garçons, 75% viennent en bus au lycée.

1. Notons E l'ensemble des élèves de la classe, G l'ensemble des garçons et B l'ensemble des garçons venant en bus. Quelle inclusion peut-on écrire ?
2. Quelle est la valeur du rapport $\frac{\#(G)}{\#(E)}$?
3. Quelle est la valeur du rapport $\frac{\#(B)}{\#(G)}$?
4. Quelle est la valeur du rapport $\frac{\#(B)}{\#(E)}$?
5. Quel pourcentage d'élèves de la classe constitue l'ensemble des garçons venant en bus au lycée ?

Propriété.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \subset B$. Alors $f_E(A) = f_B(A) \times f_E(B)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} f_E(A) &= \frac{\#(A)}{\#(E)} \\ &= \frac{\#(A)}{\#(B)} \times \frac{\#(B)}{\#(E)} \\ &= f_B(A) \times f_E(B) \end{aligned}$$

Exercice 4 – Dans un lycée, 40% des élèves sont en filière technologique. Parmi les élèves de la filière technologique, 10% sont en filière STL. Quelle est la proportion d'élèves de STL dans le lycée ?

Exercice 5 – Dans un entreprise, deux cinquièmes des employés sont des cadres. Et 60% des cadres sont des femmes. Quelle est la proportion de femmes cadres parmi les employés ?

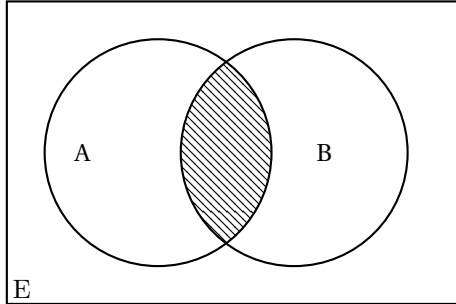
1.3 Intersection et réunion

Définition.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- L'intersection de A et B (notée $A \cap B$) est l'ensemble des éléments de E qui sont communs à A et B, c'est à dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.

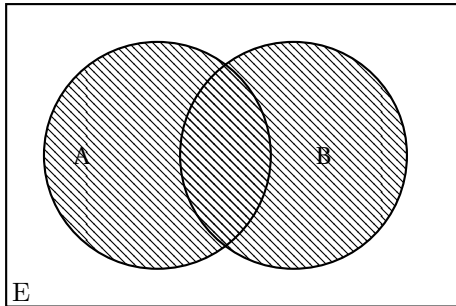
Pour tout élément $e \in E$: $e \in A \cap B \iff e \in A$ et $e \in B$.



La zone hachurée est l'intersection $A \cap B$

- La réunion de A et B (notée $A \cup B$) est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins l'un des ensembles A, B, c'est à dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.

Pour tout élément $e \in E$: $e \in A \cup B \iff e \in A$ ou $e \in B$.



La zone hachurée est la réunion $A \cup B$

Remarque

- On rappelle que **et** entre « $e \in A$ » et « $e \in B$ » signifie que les deux conditions doivent être réalisées, c'est à dire que e doit être élément commun à A et à B pour être dans l'intersection.
- On rappelle que le **ou** n'est pas exclusif, ce qui signifie que « $e \in A$ ou $e \in B$ » est satisfait par tout élément tel que $e \in A$, par tout élément tel que $e \in B$, et en particulier par tout élément e appartenant à la fois à A et B. On a donc toujours $A \cap B \subset A \cup B$.

Définition.

Lorsque deux parties A et B n'ont aucun élément commun, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.

Propriété.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On a toujours : $f_E(A \cap B) + f_E(A \cup B) = f_E(A) + f_E(B)$.

Exercice 6 – Expliquer la propriété précédente.

Exercice 7 – Parmi les 500 appareils fabriqués lors de la journée par une entreprise, 25 ont un défaut A, 19 ont un défaut B. Parmi ces appareils présentant au moins un défaut, 5 présentent les deux défauts (les autres n'en présentent qu'un seul des deux).

Quelle est la proportion d'appareils présentant le défaut A ou le défaut B (c'est à dire la proportion d'appareils présentant au moins l'un des deux défauts) ?

Exercice 8 – Un club de fitness a 180 adhérents. 45% des adhérents sont inscrits à l'activité Zumba, 40% sont inscrits à l'activité Step. 10% des adhérents pratiquent ces deux activités.

Attention. Ne lisez pas autre chose que ce qui est écrit. Lorsqu'on écrit «45% pratiquent la Zumba», on n'écrit pas «45% pratiquent uniquement la Zumba»...

1. Déterminer la proportion d'adhérents pratiquant au moins l'une de ces deux activités.
2. Déterminer le nombre d'adhérents ne pratiquant ni la Zumba, ni le Step.

2 Tableaux croisés

2.1 Tableau croisé d'effectifs

Exercice 9 – Dans un groupe de lycéens, on a les données suivantes concernant l'appli préférée entre Snapchat et Instagram :

	Garçons	Filles	Total
préfère Instagram	6	12	
préfère Snapchat	8	9	
Total			

1. Quel est le nombre de filles de ce groupe ?
2. Compléter les **marges** du tableau (c'est à dire la colonne «total» et la ligne «total»).
3. Quel est l'effectif total de ce groupe de lycéens et lycéennes ?

2.2 Fréquences marginales

Exercice 10 – Dans le tableau ci-dessus, diviser chaque effectif par l'effectif total du groupe et reporter le résultat dans la cellule correspondante du tableau ci-dessous :

	Garçons	Filles	Total
préfère Instagram			
préfère Snapchat			
Total			

Les fréquences lues dans les marges sont appelées **fréquences marginales**. Ce tableau est appelé tableau des fréquences marginales (bien que les fréquences marginales n'occupent que les marges... le nom est destiné à distinguer clairement ce tableau des tableaux des paragraphes suivants).

On notera dans la suite :

- S : l'ensemble des lycéens de ce groupe préférant Snapchat.
- I : l'ensemble des lycéens de ce groupe préférant Instagram.

- G : l'ensemble des garçons de ce groupe.
- F : l'ensemble des filles de ce groupe.
- L : le groupe total des lycéens et lycéennes.
 1. Quelle est la proportion de ceux qui préfèrent Snapchat dans ce groupe ? En d'autres termes, quelle est la valeur de $f_L(S)$?
 2. Quelle est la proportion de filles dans ce groupe ? En d'autres termes, quelle est la valeur de ... ?
 3. Quelle est la proportion de garçons utilisant Instagram dans ce groupe ? En d'autres termes, quelle est la valeur de ... ?

2.3 Fréquences conditionnelles

2.3.1 Fréquences conditionnelles par ligne

Exercice 11 – On élimine la marge-ligne et on divise les effectifs dans une ligne du tableau initial par le total lu dans la marge de cette même ligne. La marge-colonne contiendra donc des 1.

	Garçons	Filles	Total
préfère Instagram			
préfère Snapchat			

1. Que représente la valeur lue à l'intersection de la ligne «Instagram» et de la colonne «Filles» ? Il s'agit donc de la fréquence ...
2. Quelle est la proportion de garçons dans le groupe préférant Snapchat ? Il s'agit donc de la fréquence ...

Les fréquences lues sont nommées **fréquences conditionnelles**.

Par exemple, la fréquence de filles dans le groupe préférant Snapchat est la fréquence $f_S(S \cap F)$, qu'on appellera fréquence de F conditionnée par S et que l'on notera plus simplement $f_S(F)$. Il s'agit essentiellement de changer l'ensemble de référence : on travaille dans S plutôt que dans L, mais se faisant on ne considère évidemment plus l'ensemble F de toutes les filles mais l'ensemble $F \cap S$ des filles de ce nouvel univers de référence. L'écriture $f_S(F)$ peut donc être considérée comme un «abus» d'écriture, mais l'ensemble S en indice lève toute ambiguïté.

2.3.2 Fréquences conditionnelles par colonne

On élimine cette fois la marge-colonne et on divise chaque valeur par le total indiqué dans la cellule de la marge-ligne de cette colonne.

	Garçons	Filles
utilise Instagram		
utilise Snapchat		
Total		

1. Remplir ce tableau.
2. Pour chaque cellule hors de la ligne-marge, préciser quelle est la fréquence calculée à l'aide des notations $f_{...}(...)$ puis à l'aide d'une phrase.

2.4 Exercices

Exercice 12 – Un traiteur prépare 200 petits fours, dont 60% sont de forme carrée.

On donne ci-dessous le tableau des fréquences conditionnelles en lignes :

	Chocolat	Fruits	Total
Carré	25%	75%	100%
Rond	40%	60%	100%

Compléter le tableau des effectifs :

	Chocolat	Fruits	Total
Carré			
Rond			
Total			

Exercice 13 – Un virus atteint 3% de la population de 30 000 habitants d'une ville. La population de la ville est soumise à un test.

On donne ci-dessous le tableau des fréquences conditionnelles en colonnes :

	atteint	non atteint
test positif	0,98	0,01
test négatif	0,02	0,99
total	1	1

Quel est le nombre de tests positifs obtenus ?

Exercice 14 – Le tableau suivant donne la répartition des effectifs de la population active en 2016 en France.

	Femmes	Hommes	total
ayant un emploi	12 822		26 584
sans emploi		1 571	
total des actifs			29 556

1. Compléter ce tableau d'effectifs.
2. En déduire le tableau des fréquences marginales.
3. Donner le tableau des fréquences conditionnelles en lignes. Traduire par une phrase la valeur obtenue à l'intersection de la colonne «Femmes» et de la ligne «sans emploi».
4. Donner le tableau des fréquences conditionnelles en colonnes. Traduire par une phrase la valeur obtenue à l'intersection de la colonne «Femmes» et de la ligne «sans emploi».

Exercice 15 – En 2017, 46% des 102 250 médecins généralistes sont des femmes et 44,5% des 122 600 médecins spécialisés sont des femmes.

1. Compléter le tableau d'effectifs :

	homme	femme	total
généraliste			
spécialiste			
total			

2. On note • M l'ensemble des médecins, • G l'ensemble des généralistes, • S l'ensemble des spécialistes, • H l'ensemble des hommes médecin, • F l'ensemble des femmes médecin.
 - (a) Déterminer la fréquence de H conditionnée par G.
 - (b) Déterminer la fréquence de G conditionnée par H.
 - (c) Déterminer la fréquence de F dans l'ensemble M.