Les probabilités conditionnelles

2023

1 Rappel sur la notion de probabilité

Définition (rappel).
Une probabilité sur un ensemble fini Ω est une fonction $\mathbb{P}$ définie sur les parties de Ω et à valeurs dans $[0;1]$ telle que :

— $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

— $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

— Pour tous éléments ω_1, ω_2, ..., ω_k de Ω : $\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Exemple.
On jette un dé déséquilibré, les probabilités d'obtenir les faces 1 à 5 sont données dans le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une face impaire ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir la face 6 ?

Définition.
Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

1. On appelle « A ou B » l'événement $A \cup B$ constitué des issues réalisant au moins l'un des deux événements A, B.
2. On appelle « A et B » l'événement $A \cap B$ constitué des issues qui réalisent les deux événements A et B.
3. On appelle événement contraire (ou événement complémentaire) de l'événement A l'événement noté $\overline{A}$ réalisé par les issues de Ω ne réalisant pas A.

Exercice 1 – Illustrer par des diagrammes de Venn chacune de ces notions.

Vocabulaire.
Deux événements tels que $A \cap B = \varnothing$ sont dits incompatibles (ou disjoints).

Théorème.
Soient A et B deux événements d'un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.

* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
* $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Exercice 2 – Dans un club de sports, 25% des usagers pratiquent la natation, 30% pratiquent le judo, 12% pratiquent le judo et la natation. On choisit un usager au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ne pratique ni le judo, ni la natation ?

2 Définition d'une probabilité conditionnelle

Exercice 3 – On considère la population des élèves de terminales d'un lycée :

	filles	garçons	total
Italien	9	27	
Autres langues	74		
totaux			166

On choisit un élève au hasard parmi les élèves de terminale.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève de terminale de ce lycée soit une fille qui apprend l'italien ?
2. Si je sais que l'élève choisi est une fille, répondre à la même question.
3. Avec l'expérience aléatoire : « choix d'un élève au hasard dans l'ensemble des élèves de terminale. », on note F : « l'élève choisi est une fille » et I : « l'élève choisi apprend l'italien ».
   Exprimer la probabilité demandée en question 2 à l'aide de ces notations.
4. Exprimer de même la probabilité qu'un élève suivant un cours d'italien soit une fille.

Propriété.
Soit Ω un ensemble muni d'une probabilité $\mathbb{P}$.
Soit A une partie de Ω (dans le vocabulaire des probabilités, on parlera plutôt d'un événement de l'univers Ω) telle que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.

La fonction $\mathbb{P}_A$ définie pour toute partie B de Ω par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une probabilité sur Ω.
En particulier, pour deux événements B et C, on a :

a) $0 \leqslant \mathbb{P}_A(B) \leqslant 1$.

b) $\mathbb{P}_A(B \cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B \cap C)$, ce que l'on peut écrire sous la forme $\mathbb{P}_A(B \cup C) + \mathbb{P}_A(B \cap C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C)$.

c) $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}_A(B) = 1$.

Définition.
La probabilité $\mathbb{P}_A$ explicitée dans la propriété précédente est appelée probabilité conditionnée par A.
Pour lire $\mathbb{P}_A(B)$, on dira donc « probabilité conditionnée par A de l'événement B ». Pour abréger, on dira souvent : « probabilité de B sachant A ».

Remarque
L'égalité $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ s'écrit aussi sous la forme suivante (souvent utile) :

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

et de façon « symétrique » :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Exercice 4 – Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}6$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}8$. Déterminer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}_A(B)$.

Exercice 5 – Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) = \dfrac{1}{3}$. Déterminer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \cup A)$.

Exercice 6 – Dans une entreprise, 30% des employés sont des hommes, 60% des employés sont des cadres et 12% des employés sont des cadres masculins.
On choisit un employé au hasard. On note H l'événement « l'employé choisi est un homme. » et C l'événement « l'employé choisi est un cadre. »

1. Interpréter à l'aide de probabilités portant sur H et C les données numériques de l'énoncé.
2. Déterminer $\mathbb{P}_{\mathrm{H}}(\mathrm{C})$.
3. On sait que la personne choisie est un cadre.
   (a) Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?
   (b) Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Exercice 7 – Les données client d'un opérateur de téléphonie montrent que 10% des clients contactés par téléphone acceptent de changer de forfait. Parmi les personnes acceptant de changer de forfait, 70% sont des hommes. Parmi les clients qui ne changent pas de forfait, 60% sont des femmes.
On chosit un client au hasard. On note :

— H : « le client choisi est un homme. »
— C : « le client choisi change de forfait. »

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{H} \cap \mathrm{C})$.
2. Quelle est la probabilité que le client choisi soit une femme qui ne change pas de forfait ?

Exercice 8 – Dans une boîte, on trouve des clous et des vis. Les clous et les vis peuvent être à tête plate ou à tête ronde.

- Il y a 140 pièces dans la boîte.
- 51 pièces sont à tête ronde.
- Il y a 85 clous.
- 40% des clous sont à tête rondes.

1. Remplir le tableau d'effectifs :

	clous	vis	total
tête plate			
tête ronde			
total			

2. On choisit une pièce au hasard dans la boîte.
   On note :
   - C : «la pièce choisie est un clou »
   - R : «la pièce choisie est à tête ronde »

   (a) Calculer la probabilité des événements C, $\overline{\mathrm{C}}$, R, $\overline{\mathrm{R}}$, $\mathrm{R} \cap \mathrm{C}$, $\mathrm{R} \cup \mathrm{C}$, $\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{C}$, $\overline{\mathrm{R}} \cap \overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{R} \cap \mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{R} \cup \mathrm{C}}$.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\mathrm{R})$, $\mathrm{P}_{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{R}})$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\mathrm{R})$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{C}}}(\overline{\mathrm{R}})$.
   (c) Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}(\mathrm{C})$, $\mathrm{P}_{\mathrm{R}}(\overline{\mathrm{C}})$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{C})$, $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{R}}}(\overline{\mathrm{C}})$.

Exercice 9 – Des puces électroniques sont produites par deux laboratoires A et B. Le laboratoire A est à l'origine de 40% de la production totale des deux laboratoires. 5% des puces produites par A présentent un défaut, tandis que 2% des puces produites par B en présentent un.
On considère l'ensemble E de toutes les puces produites par ces deux laboratoires. On note D la partie de E constituée des puces défectueuses et A la partie de E constituée des puces fabriquées par le laboratoire A.

1. Compléter le tableau des fréquences marginales :

	D	$\overline{\text{D}}$	total
A			
$\overline{\text{A}}$			
total			1

2. On choisit une puce au hasard dans l'ensemble E.
   (a) Quelle est la probabilité que cette puce vienne du laboratoire B ?
   (b) Quelle est la probabilité que cette puce ne présente pas de défaut ?
   (c) Quelle est la probabilité que cette puce vienne de B et présente un défaut ?
   (d) Quelle est la probabilité que cette puce vienne de B ou présente un défaut ?
   (e) Quelle est la probabilité que cette puce ne vienne pas de B et ne présente pas de défaut ?
   (f) Sachant que cette puce vient du laboratoire A, quelle est la probabilité qu'elle ne présente pas de défaut ?
   (g) Sachant que cette puce présente un défaut, quelle est la probabilité que cette puce vienne du laboratoire B ?

Exercice 10 – Soient A et B deux événements d'un univers probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{P}(\text{A}) = 0{,}8$, $\mathbb{P}_{\text{A}}(\text{B}) = 0{,}45$ et $\mathbb{P}_{\overline{\text{A}}}(\text{B}) = 0{,}8$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\text{A} \cap \text{B})$.
2. Déterminer $\mathbb{P}\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right)$.
3. Compléter le tableau :

	B	$\overline{\text{B}}$	total
A			
$\overline{\text{A}}$			
total			1