Produit scalaire

2023

1 Norme d'un vecteur

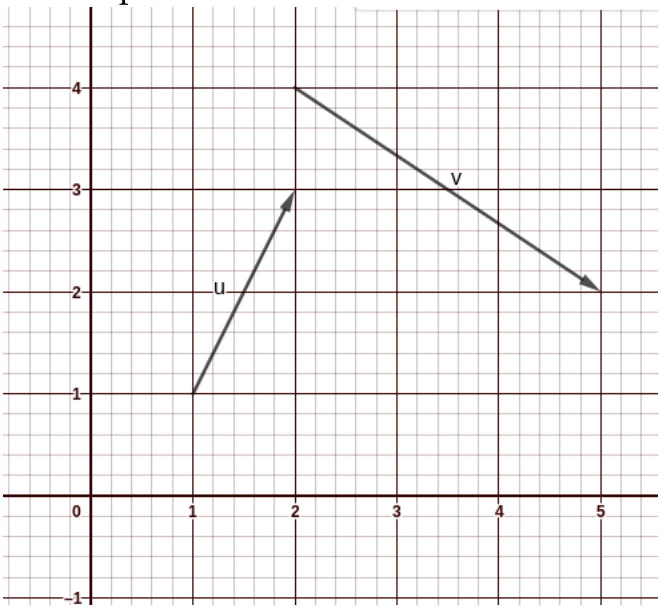
Définition.
Soit $\vec{u}$ un vecteur et A, B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur AB.

$$\boxed{\|\vec{u}\| = AB}$$

Propriété (rappels de seconde).
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points du plan. On a $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$.
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors le couple des coordonnées de $\vec{u}$ est $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.
- si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}})$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$.

Exercice 1 – Donner la norme des deux vecteurs représentés ci-dessous dans un repère orthonormé.



Résolution.
Le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1;2)$. On a donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$, soit $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2}$ ou $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{5}}$.

Le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(3;-2)$. On a donc $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_{\vec{v}}^2 + y_{\vec{v}}^2}$, soit $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+(-2)^2}$ ou $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{13}}$. □

Exercice 2 – Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soient $A(1\ ;\ -2)$, $B(-3\ ;\ 2)$ et $C(1\ ;\ 1)$.

1. Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{CA}$. Calculer la norme de $\vec{u}$.
3. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Résolution.
1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, soit $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-(-2))^2}$.

   On a donc $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{2\times 16} = \sqrt{16}\times\sqrt{2}$, soit $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4\sqrt{2}}$.

2. $\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{0^2+3^2}$, soit $\boxed{CA = 3}$.
3. On a $AB = 4\sqrt{2}$ et $AC = 3$. On calcule la longueur CB de la même façon : $CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$, d'où $CB = \sqrt{17}$.

   On cherche ensuite à appliquer le théorème de Pythagore. On remarque déjà que le plus long des trois côtés est le côté [AB] : si le triangle ABC est rectangle, l'hypoténuse est donc nécessairement le côté [AB] et le triangle ne peut être rectangle qu'en C.

   On a d'une part $AB^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 4^2 \times \sqrt{2}^2 = 16 \times 2 = 32$ et d'autre part $CA^2 + CB^2 = 9 + 17 = 26$. Ainsi $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$: le triangle n'est pas rectangle. $\square$

2 Produit scalaire de deux vecteurs

Vous savez que dans un triangle ABC rectangle en C, on a l'égalité $AB^2 = CA^2 + CB^2$: c'est le théorème de Pythagore.

Il se trouve que l'on peut énoncer une formule qui sera, elle, valable dans **tout** triangle : $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB\cos\left(\widehat{C}\right)$. C'est ce que l'on appelle la formule d'Al Kashi (ou encore formule de Pythagore gnéralisée). Cette formule fait apparaître la quantité $CA \times CB \times \cos\left(\widehat{C}\right)$ que l'on va manipuler dans ce qui suit.

Définition.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)}$.

On pose par ailleurs $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ et $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$.

Exercice 3 – 1. Soient $\vec{u}$ un vecteur de norme 5 et $\vec{v}$ un vecteur de norme 3. On suppose que l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ a pour mesure principale $\dfrac{5\pi}{6}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 7$ et $\vec{v}$ un vecteur de norme 1. On suppose que l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{4}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Résolution.

1.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ &= 5\times 3\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 15\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 15\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= -15\times\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \\ &= 7\times 1\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 7\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 4 – 1. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = \dfrac{1}{2}$ et $\vec{v}$ un vecteur de norme 6. On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$?

2. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 3$. On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$?

3. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 5$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 6$. On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 15\sqrt{2}$. Quelle est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$?
4. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = \dfrac{2}{3}$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 6$. On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\sqrt{3}$. Quelle est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$?
5. Soient $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$. On suppose que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Quelle est la mesure principale de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$?

Résolution.

1. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici : $-3 = \dfrac{1}{2} \times 6 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, soit $-3 = 3 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$
   d'où $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = -1$.
   On cherche donc l'angle de cosinus égal à -1 : l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure principle $\pi\,\text{rad}$.
2. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici : $-3 = 2 \times 3 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, soit $-1 = 2 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ (en divisant chaque membre par 3) et
   $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{-1}{2}$.
   L'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure principle $\dfrac{2\pi}{3}\,\text{rad}$ ou $\dfrac{-2\pi}{3}\,\text{rad}$.
3. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici : $15\sqrt{2} = 5 \times 6 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, soit $\sqrt{2} = 2 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ (en divisant chaque membre par 15) et
   $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure principle $\dfrac{\pi}{4}\,\text{rad}$ ou $\dfrac{-\pi}{4}\,\text{rad}$.
4. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici :
   $-2\sqrt{3} = \dfrac{2}{3} \times 6 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$,
   soit $-2\sqrt{3} = 4 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, ce qui donne $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4}$ ou encore

$\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

L'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure principle $\dfrac{5\pi}{6}$ rad ou $\dfrac{-5\pi}{6}$ rad.

5. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici :
   $1 = \sqrt{2} \times 1 \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$,
   soit $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.
   On rappelle que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ s'écrit aussi $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, en effet :
   $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$ (en multipliant par $\sqrt{2}$ le numérateur et le dénominateur) et $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure principle $\dfrac{\pi}{4}$ rad ou $\dfrac{-\pi}{4}$ rad.

Exercice 5 –

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Quelle est la norme de $\vec{u}$?
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{v}\| = \dfrac{1}{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Quelle est la norme de $\vec{u}$?

Résolution.

1. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici :
   $3 = \|\vec{u}\| \times 3 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$,
   soit $1 = \|\vec{u}\| \times \dfrac{1}{2}$.
   D'où $\|\vec{u}\| = 2$.
2. La formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ s'écrit ici :
   $-3 = \|\vec{u}\| \times \dfrac{1}{2} \times \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$,

soit $-6 = \|\vec{u}\| \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

D'où $\|\vec{u}\| = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$. □

3 Avec trois points

Si A, B, C sont trois points distincts dans le plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$$

Remarque

Comme pour tout réel α, on a $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, on a : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$.

Définition (rappel du collège).
Dans un triangle ABC :

- La médiane issue de A est la droite passant par le sommet A et le milieu du segment [BC].
- La médiatrice de [BC] est la droite perpendiculaire à [BC] et passant par le milieu de [BC].
- La droite hauteur issue de A est la perpendiculaire à [BC] passant par A.
- La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ est la droite passant par A et coupant l'angle en A en deux angles égaux.

Propriété (rappel du collège).
Dans un triangle ABC équilatéral, la médiane issue de A est aussi la hauteur issue de A, mais aussi la médiatrice de [BC], et également la bissectrice de l'angle en A.

Exercice 6 – Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 et I le milieu de [BC]. Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IA}$.

Exercice 7 – ABC est un triangle tel que $AB = 10$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$. Déterminer $\widehat{BAC}$.

Exercice 8 – ABC est un triangle tel que $AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2$. Déterminer $\widehat{BAC}$.

Exercice 9 – Soit ABCD un carré de côté 5. Déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

4 Carré scalaire

Propriété.
Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le carré scalaire de $\vec{u}$ (c'est à dire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ que l'on peut noter $\vec{u}^2$) est toujours égal au carré de la norme : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$.

Preuve.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{0}\cdot\vec{0} = 0$ et $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{0}\|^2 = 0^2 = 0$. L'égalité est donc vérifiée dans ce cas.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors l'angle $(\vec{u}\ ;\ \vec{u})$ est égal à 0 (modulo 2π). Donc $\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{u}) = 1$ et

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 \\ &= \|\vec{u}\|^2\end{aligned}$$

On a bien encore $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$. $\square$

Remarque
En particulier, pour deux points A et B, le carré de la longueur AB pourra être notée sous la forme AB^2, sous la forme $\|\overrightarrow{AB}\|^2$ ou encore sous la forme $\overrightarrow{AB}^2$ (en d'autres termes : $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$).

5 Quelques règles de calcul

Exercice 10 – Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. A-t-on toujours $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$? Justifier.

On peut démontrer les règles suivantes (que l'on admettra ici) :

Propriété.
- (symétrie) Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout vecteur $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- (distributivité) Pour tout vecteur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{v}$, tout vecteur $\vec{w}$: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, tout vecteur $\vec{v}$ et tout réel k, on a $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Exercice 11 – Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

a) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$. b) Calculer $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u}$. c) Calculer $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$. d) Calculer $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot(\vec{u}-5\vec{v})$. e) Calculer $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

6 Expression analytique du produit scalaire

Propriété.
Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ deux vecteurs. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifie l'égalité suivante : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$.

Preuve.
Notons $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ le repère orthonormé dans lequel on travaille.

- Rappelons déjà que dire que ce repère est orthonormé signifie que :
  (a) d'une part, on a $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Et l'on a donc en particulier $\vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1^2 = 1$ et de même $\vec{j}^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1^2 = 1$.
  (b) d'autre part $\vec{i} \perp \vec{j}$, plus précisément $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, d'où $\vec{i}\cdot\vec{j} = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. □
- Rappelons également que $\vec{u}$ a pour couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans ce repère signifie que l'on a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. De même $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.
- On peut maintenant exprimer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)\\ &= \left(x\vec{i}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right)+\left(x\vec{i}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right)+\left(y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right)+\left(y\vec{j}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right)\\ &= xx'\vec{i}\cdot\vec{i}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}\cdot\vec{j}\\ &= xx'\times 1+xy'\times 0+yx'\times 0+yy'\times 1\\ &= xx'+yy'\end{aligned}$$

Exercice 12 –

1. Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u}$ de couple de coordonnées $(-2\ ;\ 3)$ et $\vec{v}$ de couple de coordonnées $(5\ ;\ 4)$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u}$ de couple de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{4}{5}\right)$ et $\vec{v}$ de couple de coordonnées $\left(\frac{7}{3}\ ;\ 4\right)$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Exercice 13 – Dans un repère orthonormé du plan, on considère les trois points $A(2\ ;\ 3)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(-2\ ;\ -3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$ (avec la calculatrice).
3. Calculer $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
4. En déduire une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BCA}$ (avec la calculatrice).

7 Orthogonalité

Définition.
Deux vecteurs non nuls sont dits orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires.

Le vecteur nul $\vec{0}$ ne définit pas de direction et est donc exclu de la définition précédente. Toutefois, pour des raisons de cohérence dans un certain nombre de situations, on convient que $\boxed{\text{le vecteur nul } \vec{0} \text{ est orthogonal à tout autre vecteur}}$.

Propriété.
Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. En d'autres termes, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques, on a :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Preuve.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on a $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) \equiv \pm\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \iff \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 0$, d'où $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 0 \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. □

Exercice 14 – Pour chacun des cas suivants :

- Représenter les deux vecteurs sur une figure (avec le point $(0;0)$ pour origine).
- Sont-ils orthogonaux (faire une conjecture graphique puis démontrer) ?

a) $\vec{u}\,(-3\ ;\ 2)$, $\vec{v}\,(2\ ;\ 3)$. b) $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{-3}{4}\right)$, $\vec{v}\left(\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{-1}{6}\right)$. c) $\vec{u}\left(\sqrt{3}\ ;\ 2\right)$, $\vec{v}\left(-2\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{6}\right)$.

Exercice 15 –

1. Déterminer le (ou les) réel(s) x tel(s) que $\vec{u}\,(-2x\ ;\ -5)$ et $\vec{v}\,(x\ ;\ 8)$ soient orthogonaux.
2. Déterminer le (ou les) réel(s) x tel(s) que $\vec{u}\,(x\ ;\ x+2)$ et $\vec{v}\,(x+2\ ;\ 2)$ soient orthogonaux.

3. On considère $\vec{u}\,(x+5\ ;\ x-3)$ et $\vec{v}\,(x\ ;\ 3)$.
    (a) Vérifier qu'avec $x=1$ ces deux vecteurs sont orthogonaux.
    (b) En déduire la seconde valeur de x telle que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice 16 – Soient $A\,(2\ ;\ 5)$, $B\,(1\ ;\ 2)$, $C\,(5\ ;\ 4)$, $D\,(8\ ;\ 3)$ quatre points.

1. Représenter les quatre points sur une figure.
2. Emettre une conjecture graphique sur la perpendicularité des droites (AB) et (CD).
3. Confirmer ou infirmer votre conjecture par le calcul.

Exercice 17 – Soient $A\,(1\ ;\ 1)$, $B\,(3\ ;\ 2)$, $C\,(0\ ;\ 3)$ trois points.

1. Calculer AB et AC.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

8 Le théorème d'Al Kashi

Théorème (Al Kashi ou Pythagore généralisé).
Dans un triangle ABC quelconque, on a :

- $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \times BA \times BC \times \cos\left(\widehat{B}\right)$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{A}\right)$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos\left(\widehat{C}\right)$

Remarque
Si ABC est rectangle en A, on a $\cos\left(\widehat{A}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. L'égalité $BC^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{A}\right)$ se réécrit donc $BC^2 = AB^2+AC^2$: on retrouve ainsi l'égalité de Pythagore.

Preuve.

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \overrightarrow{AB}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)^2 \qquad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 \qquad \text{(en développant)} \\
&= AC^2 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} + CB^2 \\
&= CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos\left(\widehat{C}\right)
\end{aligned}$$

> **Remarque**
> Al Kashi (1380 – 1429) mathématicien perse.

Exercice 18 – Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

1. Calculer la longueur BC.
2. Déterminer une valeur approchée au millième de la mesure en radians de l'angle en C.

Exercice 19 – Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$ rad.

1. Calculer la longueur BC.
2. Déterminer une valeur approchée au millième de la mesure en radians de l'angle en C.

Exercice 20 – Un triangle ABC est tel que $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$. Donner une mesure des angles.

Exercice 21 – Un triangle ABC est tel que $AB = 6$, $BC = 5\sqrt{2}$, $AC = 7$. Donner une mesure des angles.

9 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Propriété.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} +\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \text{ lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \text{ lorsque } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}$

Preuve.

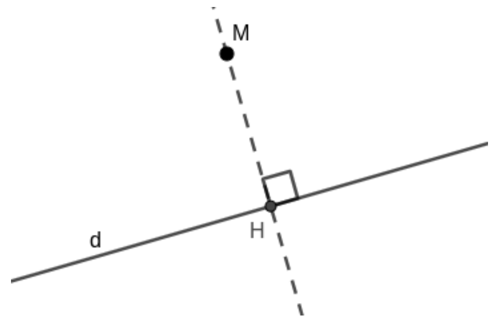
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle nul, donc $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 1$. On a donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le demi-tour ($\pi\,\mathrm{rad}$), donc $\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = -1$. On a donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$. $\square$

Exercice 22 – Soit A, B,C trois points alignés tels que $AB = 5$ et $AC = 2$.

1. Si $C \in [AB]$, déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Si $C \notin [AB]$, déterminer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

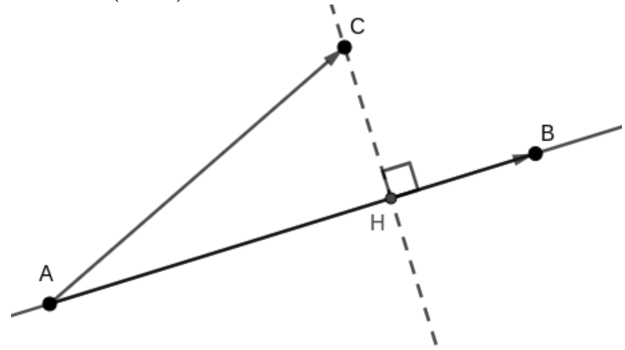
10 Projeté orthogonal

Définition.
Soit d une droite et M un point du plan. On appelle projeté orthogonal de M sur d le point H à l'instersection de d et de la perpendiculaire à d passant par M.



Remarque
Par exemple, dans un triangle ABC, le pied de la hauteur issue de A est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Propriété.
Soient A, B, C trois points du plan. Notons H le projeté orthogonal de C sur (AB). Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.



Preuve.
Avec la relation de Chasles, nous avons : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$.

En développant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$.

Or $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \mathbf{0}$.

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$ □

Remarque
Comme le projeté orthogonal de C sur (AB) est un point de la droite (AB), les trois points A, B, H sont alignés. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ est donc égal à $+AB\times AH$ ou à $-AB\times AH$ (d'après le paragraphe précédent sur le produit scalaire de vecteurs colinéaires).

Exercice 23 – ABC est un triangle équilatéral de côté 5. On note C' le milieu de $[AB]$.
1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$. 2. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 24 – ABCD est un carré de centre O et de côté 10. On note I le milieu de $[AB]$.
1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$. 2. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. 3. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$. 4. En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$.

Exercice 25 – ABCD est un losange de centre O. $AC=7$ et $BD=4$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Exercice 26 – Un triangle ABC est tel que $AB=5$, $BC=8$, $AC=10$.
1. Déterminer $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
2. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
   (a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire les longueurs AH et CH.

Exercice 27 – Un triangle ABC est tel que $AB=6$, $BC=5$, $AC=7$.
1. Déterminer $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$.
2. Soit K le projeté orthogonal de B sur (AC).
   (a) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
   (b) En déduire les longueurs CK et BK.