Les suites

2023

1 Définition

Définition.
Une suite est une fonction dont l'ensemble de définition est restreint à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou à une partie de cet ensemble $\mathbb{N}$ de la forme $[d\ ;\ +\infty[\cap\mathbb{N}$.

Exercice 1 – Soit u la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = n^2$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

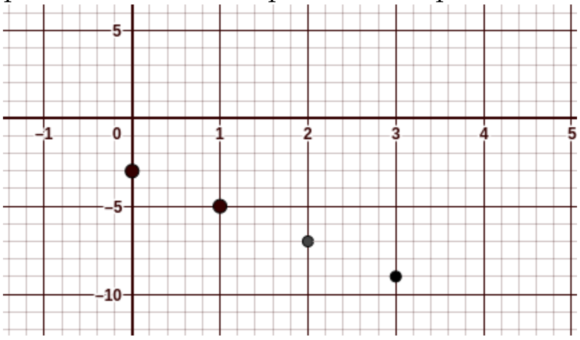
1. La fonction u est-elle une suite ?
2. Calculer $u(3)$, $u(4)$.
3. Pour une suite u, l'usage est plutôt de noter la variable en indice : on notera par exemple u_3 au lieu de $u(3)$. Calculer u_5.

Exercice 2 – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$ pour tout réel x et soit v la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n+1$ pour tout entier naturel n.

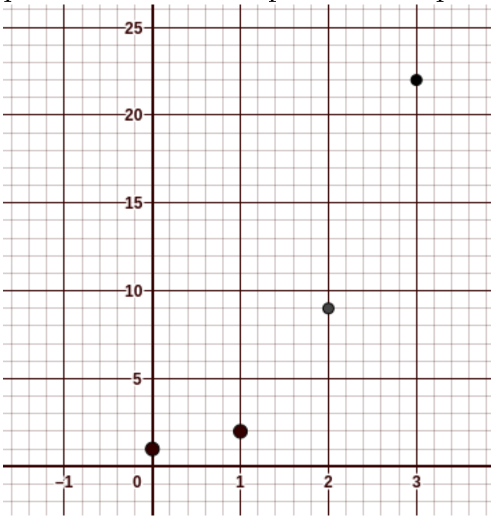
1. f est-elle une suite ? v est-elle une suite ?
2. Calculer $f(3)$ et $f(3{,}2)$.
3. Peut-on calculer v_3 et $v_{3,2}$?
4. Représenter graphiquement f.
5. Représenter graphiquement v.

Définition (rappel).
La représentation graphique de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points M dont le couple des coordonnées est de la forme $(x\ ;\ f(x))$ **où x décrit l'ensemble de définition de f.**
En particulier, lorsque f est une **suite**, les points de la représentation graphique de f ont tous des **abscisses entières**. On parlera en général de **nuage de points** pour la représentation graphique d'une suite (alors que l'on parle de courbe pour la représentation graphique d'une fonction définie sur un intervalle).

Exercice 3 – Une suite est définie sur $\mathbb{N}$ par une expression de la forme $u_n = an + b$. Le nuage de points ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. En déduire les valeurs de a, b.



Exercice 4 – Une suite u définie sur $\mathbb{N}$ a une expression de la forme $u_n = an^2 + bn + c$. Le nuage de points ci-dessous représente les premiers termes de cette suite. En déduire les valeurs de a, b, c.



2 Vocabulaire, notations

Bien qu'une suite soit une fonction particulière, on utilise d'autres notations et d'autres mots de vocabulaire.

Soit u une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de cet ensemble $\mathbb{N}$ de la forme $[d\,;\,+\infty[\cap\mathbb{N}$ (où d est un nombre).

- u est appelée suite plutôt que fonction.
- L'image d'un entier $n \in \mathbb{N}$ est notée u_n plutôt que $u(n)$. Cette image u_n est appelé **terme d'indice n** de la suite.
- La variable n est souvent appelée indice plutôt que variable. Ainsi, au lieu de parler de l'image de $n = 3$ par u (c'est à dire $u(3)$), on parlera du terme d'indice 3 de u (et on le note u_3).
- Parfois, au lieu d'écrire «la suite u», on écrira «la suite (u_n)», la présence de parenthèses signifiant que l'on parle de la suite (fonction) u et non du terme u_n.

Exercice 5 – Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer le terme d'indice 1 de la suite.
2. Calculer le terme d'indice 2 de la suite.
3. Calculer u_3.

Soit u une suite.
On précisera souvent l'ensemble de définition de la suite en indice :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de nombres $(u_0; u_1; u_2; u_3; \ldots)$,
- $(u_n)_{n\geqslant 2}$ désigne la suite de nombres $(u_2; u_3; u_4; u_5; \ldots)$,
- $(u_n)_{n>5}$ désigne la suite de nombres $(u_6; u_7; u_8; u_9; \ldots)$.

Exemple.

- $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ désigne la suite de nombres $\left(\dfrac{1}{1^2}\ ;\ \dfrac{1}{2^2}\ ;\ \dfrac{1}{3^2}\ ;\ \dfrac{1}{4^2}\ ;\ \dfrac{1}{5^2}\ ;\ldots\right)$.
- $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de nombres (compléter !) :

Remarque
Attention, on rappelle que lorsqu'on dit qu'une fonction u est définie sur $\mathbb{N}$, cela signifie que la variable ne peut prendre pour valeurs que les entiers naturels. Mais les images $u(n)$ n'ont aucune raison d'être entières. Les indices d'une suite sont donc des entiers naturels, mais les termes de la suite peuvent a priori être des réels quelconques (comme on le voit dans les exemples précédents). On pourra parfois utiliser la notation $u\colon \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$ à gauche est l'ensemble de définition (ensemble des valeurs que peut prendre la variable ou indice) et l'ensemble $\mathbb{R}$ qui est à droite est l'ensemble dans lequel les images (ou termes) peuvent prendre leurs valeurs.

3 Quelques suites de référence

Définition.

- Une suite affine, c'est à dire de la forme $n \longmapsto an+b$, sera nommée **suite arithmétique** (plutôt que suite affine). Le coefficient a sera nommé **raison** de la suite (plutôt que coefficient du terme de degré 1 ou que coefficient directeur de la droite de la représentation graphique).
- On pourra parler de suite polynômiale de degré 2 (suite de la forme $n \longmapsto an^2+bn+c$ où a est un réel non nul et b, c sont des réels quelconques).
- On pourra parler également de suite polynômiale de degré 3 (suite de la forme $n \longmapsto an^3+bn^2+cn+d$ où a est un réel non nul et b, c, d sont des réels quelconques).

- et ainsi de suite : toute restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction usuelle donne lieu à une suite (à part le cas des suites affines, on gardera le nom usuel).

On pensera bien à ces suites en se rappelant qu'il ne faut garder des courbes usuelles que les points d'abscisses entières positives.

Exercice 6 – Soit u une suite arithmétique. On sait que $u_1 = 3$ et que $u_4 = -6$.

1. Déterminer la raison de la suite.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 – Soit u une suite polynôme du second degré. On sait que $u_3 = 0$, $u_8 = 0$ et $u_9 = 5$. Donner une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 8 – Soit u une suite telle que $u_n = -7n + 8$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_{10}.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3. Exprimer u_{n+5} en fonction de n.

Exercice 9 – Soit u une suite telle que $u_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n > 0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_{10}.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3. Exprimer u_{n+5} en fonction de n.

Exercice 10 – Soit u une suite telle que $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ pour tout entier naturel $n > 0$.

1. Calculer u_1, u_2, u_{10}.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3. Exprimer u_{n+5} en fonction de n.

4 Entier suivant, terme suivant

Exercice 11 –

1. Quel est l'entier qui suit l'entier 14 ?
2. Peut-on parler du réel qui suit le réel 14 ?

- Pour un entier n, on peut parler de l'entier **suivant** : c'est l'entier $n + 1$.
- Pour un réel x, on ne peut pas parler du réel suivant : entre deux réels distincts, il en existe **toujours** une infinité d'autres.

Définition.
Soit u une suite et soit u_n le terme d'indice n de la suite. On dira que u_{n+1} est le terme suivant du terme u_n et que u_{n-1} est le terme précédent du terme u_n.
Les termes u_{n-1} et u_n seront qualifiés de termes **consécutifs** de la suite (ou u_n et u_{n+1} ...)

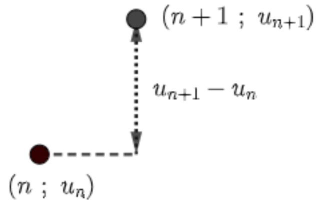
Remarque
Attention, il ne faut pas confondre $u_n+1 = u(n)+1$ et $u_{n+1} = u(n+1)$. C'est $u(n+1)$ qui est appelé terme suivant du terme u_n parce qu'il porte l'indice $n+1$, entier suivant l'entier n. Par contre dire que $u(n)+1$ serait le suivant de $u(n)$ n'aurait pas de sens (u_n et u_n+1 ne sont pas des entiers a priori, on ne peut pas parler de suivant pour le réel u_n...). C'est en tant que **terme de la suite** que l'on parle de suivant. Il faut imaginer les termes écrits dans l'ordre des indices : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, ... c'est dans cette écriture dans l'ordre des indices que l'on peut dire que les termes u_n, u_{n+1} «se suivent».
Par exemple, u_n désigne le prix (en euro) d'un article l'année n. u_{2021} désigne le prix l'année 2021. Si l'on parle du prix précédent, ce sera pour désigner le prix de l'année précédente, c'est à dire u_{2020} (et certainement pas de $u_{2021}-1$ qui correspondrait au prix de 2021 auquel on aurait enlevé un euro). En d'autres termes, l'expression «terme précédent» est un raccourci pour parler du terme d'indice précédent, de même l'expression «le terme suivant» est un raccourci pour parler du terme d'indice suivant.

Exercice 12 – Soit u une suite et n un entier.

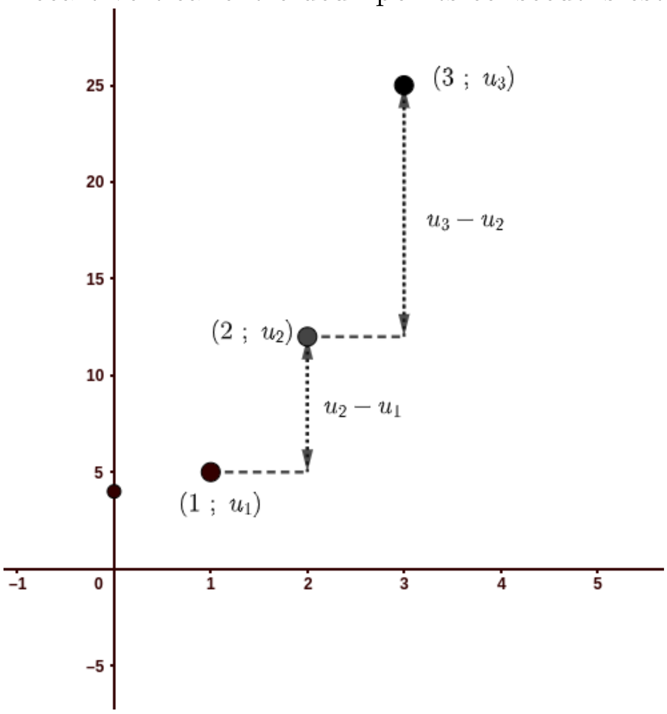
1. Quel est le terme précédent u_{12} ? le terme suivant u_{12} ?
2. Quel est le terme précédent u_{n+2} ? le terme suivant u_{n+2} ?
3. Quel est le terme précédent u_{n^2} ? le terme suivant u_{n^2} ?
4. Quel est le terme précédent $u_{(n+1)^2}$? le terme suivant $u_{(n+1)^2}$?

5 Écart entre termes consécutifs

Ecart entre deux termes consécutifs.
Soit u une suite. La différence des ordonnées entre deux points du nuage pourra être appelé écart vertical entre ces points.



L'écart vertical entre deux points consécutifs est donc la différence $u_{n+1}-u_n$.



L'écart vertical entre deux points consécutifs du nuage est la différence $u_{n+1}-u_n$ entre deux termes consécutifs de la suite.

Exercice 13 –

1. Soit u une suite arithmétique de raison $r=2$ et telle que $u_0=1$.
   (a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.
   (b) Calculer u_1, u_2, u_3.
   (c) Si on représente le nuage de points de cette suite, que peut-on dire de «remarquable» pour les points du nuage ?
   (d) Représenter graphiquement les premiers points du nuage représentant la suite.
   (e) On constate que «l'écart vertical» entre deux points du nuage est constant. Quelle est la valeur de cet écart ?
2. Soit v une suite arithmétique de raison r. Montrer que «l'écart vertical» entre deux points du nuage représentatif est constant.

Propriété.
Soit u une suite arithmétique de raison r, c'est à dire une suite dont l'expression de u_n en fonction de n est de la forme $u_n = rn + b$ pour tout entier n. Alors :

- Les points du nuage représentatif sont alignés : ils se situent tous sur la droite d'équation $y = rx + b$.
- L'écart vertical entre deux points consécutifs du nuage de points est constant. Cet écart est égal à la raison de la suite, c'est à dire au coefficient directeur de la droite support du nuage.
  En d'autres termes :
  $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : u_{n+1} - u_n = r}$

Preuve.
Il suffit de calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (r(n+1) + b) - (rn + b) \\ &= rn + r + b - rn - b \\ &= r \end{aligned}$$

On peut également remarquer, en nommant A le point de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ et B le point de coordonnées $(n+1\ ;\ u_{n+1})$, que cette différence $u_{n+1} - u_n$ est un coefficient directeur de droite (la droite sur laquelle les points du nuage sont alignés) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_{n+1} - u_n}{1} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_n}{(n+1) - n} \\ &= \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} \\ &= \text{coefficient directeur de la droite (AB)} \\ &= \text{coefficient directeur de la droite d'équation} y = rx + b \\ &= r \end{aligned}$$

Exercice 14 – *Nous avons vu que pour une suite arithmétique, l'écart entre deux termes consécutifs est constant (égal à la raison, coefficient directeur de la droite support du nuage de points). Dans cet exercice, on va se poser la question réciproque : si l'écart entre deux termes successifs est constant, la suite est-elle arithmétique ?*

1. Soit u une suite telle que l'écart entre deux termes consécutifs est constant égal à 2 et telle que $u_0 = 3$.

   (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

(b) Pour calculer u_{10}, on peut procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
u_{10} - u_9 &= 2\\
u_9 - u_8 &= 2\\
u_8 - u_7 &= 2\\
u_7 - u_6 &= 2\\
u_6 - u_5 &= 2\\
u_5 - u_4 &= 2\\
u_4 - u_3 &= 2\\
u_3 - u_2 &= 2\\
u_2 - u_1 &= 2\\
u_1 - u_0 &= 2
\end{aligned}$$

i. Ajouter tous les termes de gauche. Que reste-t-il ?
ii. Ajouter tous les termes de droite.
iii. En déduire un calcul de u_{10}.

(c) Pour calculer u_{100}, on procéde de la même façon :

$$\begin{aligned}
u_{100} - u_{99} &= 2\\
u_{99} - u_{98} &= 2\\
u_{98} - u_{97} &= 2\\
u_{97} - u_{96} &= 2\\
&\dots\\
u_3 - u_2 &= 2\\
u_2 - u_1 &= 2\\
u_1 - u_0 &= 2
\end{aligned}$$

En déduire un calcul de u_{100}.

(d) En utilisant la même technique, donner une expression de u_n en fonction de n.

2. On considère maintenant une suite u telle que les écarts entre termes consécutifs sont constants, égaux à un nombre r. En utilisant la technique précédente, donner une expression de u_n en fonction de n, r et u_0.

3. *On va retrouver l'expression précédente en donnant cette fois un argument géométrique.* On considère une suite u telle que les écarts entre termes consécutifs sont constants, égaux à un nombre r.

(a) Soit $\mathrm{A}(m\ ;\ u_m)$ un point du nuage et $\mathrm{B}(m+1\ ;\ u_{m+1})$. Calculer $\dfrac{y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}}$.

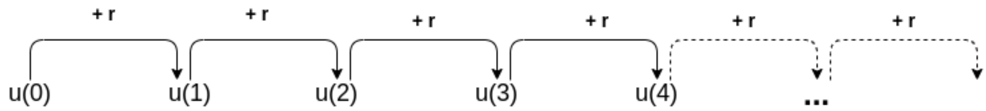
(b) Le résultat précédent ne dépend pas de m. Qu'en déduit-on ?

(c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Propriété.
Soit u une suite telle que l'écart entre deux termes consécutifs est constant égal à un nombre r.
Alors la suite u est arithmétique et on a, pour tout entier n : $u_n = rn + u_0$.

Remarque
Nous avons donc maintenant deux façons équivalentes de définir une suite arithmétique de raison r :

1. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle, pour tout entier naturel n, on a $u_n = rn + b$ (et on a nécessairement $b = u_0$).
2. Une suite arithmétique est une suite telle que les écarts consécutifs sont constants égaux à r.



Exercice 15 – Alice possède 5000 € au premier janvier 2020. Chaque mois elle dépense 120 €. On note $s_0 = 5000$ et s_n la somme restante après l'écoulement de n mois.

1. Que représente s_1 ? Quelle est la valeur de s_1 ?
2. Que représente s_2 ? Quelle est la valeur de s_2 ?
3. Justifier que la suite (s_n) est arithmétique.
4. En déduire une expression de s_n en fonction de n.
5. Après combien de mois lui restera-t-il moins de 100 € ?

Exercice 16 – Une salle de sport ouvre au 1er janvier 2018. On a offert au départ l'abonnement à 40 personnes. On constate que chaque mois, il y a 35 adhérents de plus.
On note $u_0 = 40$ et u_n le nombre d'adhérents après n mois.

1. Que représente u_1 et u_2 ? Donner leur valeur.
2. Donner une expression de u_n en fonction de n.
3. Quel est le nombre d'adhérents à la fin janvier 2020 ?
4. Après combien de mois aura-t-on au moins 350 adhérents ?

Exercice 17 – Une personne veut prendre l'habitude de faire 15 000 pas par jour.
Elle constate qu'elle en fait envirion $p_0 = 1000$ par jour. Elle décide d'augmenteer chaque semaine de 500 son nombre de pas journalier.
On note p_n le nombre de pas journalier la semaine n.

1. Que représente p_1, p_2 ? Déterminer leur valeur.
2. Donner une expression de p_n en fonction de n.
3. Quel est le nombre de pas journalier durant la semaine 10 ?
4. Quelle semaine cette personne fera-t-elle au moins 15 000 pas par jour ?

6 Suite définie par une relation de récurrence

6.1 Terme défini en fonction du précédent

Exercice 18 – Un article augmente chaque année de 2%. On note p_n son prix l'année n.

1. Exprimer le prix p_{n+1} de l'année $n+1$ en fonction du prix p_n de l'année n.
2. Peut-on connaître le prix en 2022 ?
3. Le prix de l'article en 2018 est $p_{2018} = 100$. Quel est le prix de l'article en 2022 ?
4. p_{n+1} est le prix l'année $n+1$. Et $p_n + 1$?

Définition.
Les suites étant définies sur les entiers, on va pouvoir définir ce type de fonction en exprimant l'image de n en fonction de l'image de l'entier précédant $n-1$, c'est à dire en définissant (pour une suite u) u_n en fonction de u_{n-1}. Il nous faudra également connaître une valeur, par exemple u_{2018}, pour en déduire les autres valeurs.
On dira que l'on a ainsi défini la suite par une **relation de récurrence**.

Remarque
Pour définir chaque terme en fonction du terme d'indice précédant, on définit

1. u_n en fonction de u_{n-1} pour tout entier n tel que n et $n-1$ soient un entier naturel.
2. ou encore u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier n tel que $n+1$ et n soient un entier naturel.
3. ou encore u_{n+2} en fonction de u_{n+1} pour tout entier n tel que $n+2$ et $n+1$ soient un entier naturel.
4. ou encore ...

Remarque (rappel)
Ne pas confondre $u_n + 1 = u(n) + 1$ (on ajoute 1 à l'image de n) et $u_{n+1} = u(n+1)$ (on ajoute 1 à n).

> **Remarque**
> Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être définie par une relation de récurrence puisqu'il n'y a pas de notion de «suivant» pour les réels.

Exercice 19 – Une suite w est telle que $w_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = 2w_{n-1}^2$.
Calculer les trois termes suivant le terme w_0.

Exercice 20 – Une suite w est telle que $w_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = 2w_{n-1}^2 + n$.
Calculer les trois termes suivant le terme w_0.

Exercice 21 – Une suite u est telle que $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Calculer les trois termes suivant le terme u_0.

Exercice 22 – Une suite v est telle que $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = n^2 + 2v_n$.
Calculer les trois termes suivant le terme v_0.

Exercice 23 – Une suite v est telle que $v_0 = -1$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = (n+1)^2 + 2v_n$.
Calculer les trois termes suivant le terme v_0.

6.2 Le cas des suites arithmétiques

Exercice 24 – Une suite u est telle que $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 12$.

1. Justifier que la suite est arithmétique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. En déduire u_{99}.

> **Remarque**
> Des définitions équivalentes d'une suite arithmétique :
>
> 1. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que l'expression de u_n en fonction de n est de la forme $u_n = rn + b$.
> 2. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que les différences entre deux termes consécutifs sont toujours égales à r.
> 3. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que les écarts verticaux entre deux points consécutifs du nuage représentatif sont toujours égaux à r.
> 4. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
> 5. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_{n-1} + r$.
> 6. Une suite arithmétique de raison r est une suite telle que pour tout entier naturel n, on passe d'un terme quelconque au suivant en ajoutant r.
>
> Les points 2, 3, 4, 5, 6 sont simplement des écritures différentes de la même phrase. L'équivalence de ces phrases avec la phrase 1 est conséquence (nous l'avons vu plus haut) des propriétés caractéristiques des fonctions affines.

Exercice 25 – Une suite v est telle que $v_n = v_{n-1} - 5$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et $v_2 = 10$.

1. Calculer v_1, v_3.
2. Donner une expression de v_n en fonction de n.
3. Déterminer les indices n tels que $v_n < 100$.

Exercice 26 – Une suite v est telle que $v_n = v_{n-1} + \frac{2}{3}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et $v_{100} = 0$.

1. Calculer v_{99}, v_{101}.
2. Donner une expression de v_n en fonction de n.
3. Déterminer les indices n tels que $v_n > 1000$.