1 Les ensembles de nombres

1 **Définition** rappels

1. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels : c'est l'ensemble des entiers positifs. $\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ; \dots\}$. Les anglo-saxons les nomment parfois les counting-numbers. Ce sont les nombres qui servent à dénombrer (compter).
2. On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers (appelés aussi entiers relatifs). $\mathbb{Z}$ est constitué des entiers positifs et de leurs opposés.
3. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers positifs non nuls.
4. On note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers non nuls.

2 "Intervalle" d'entiers

2 **Notation**
On notera $[\![a\ ;\ b]\!]$ l'ensemble d'entiers $[a\ ;\ b] \cap \mathbb{Z}$, de même $[\![a\ ;\ b[\![$ l'ensemble d'entiers $[a\ ;\ b[\cap \mathbb{Z} \dots$

3 **Exercice**
1) Quels sont les entiers de l'ensemble $[\![2\ ;\ 8]\!]$?
2) Quels sont les entiers de l'ensemble $[\![-2\ ;\ 3[\![$?

3 Diviseurs et multiples

4 **Définition**
Soit $d \in \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. On dit que m est un multiple de d s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kd$.
On dit aussi dans ce cas que d est un diviseur de m (ou que d divise m) et on note $d \mid m$.

5 **Remarque**
$d \mid m \Longleftrightarrow \dfrac{m}{d}$ est entier.

6 **Exemples**
$-12 = 3 \times (-4)$ donc :

1. -12 est multiple de 3.
2. -12 est multiple de (-4).
3. (-4) divise -12.
4. 3 est un diviseur de -12.

7 **Notations**

1. Pour un entier a, on notera $a\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de a (c'est l'ensemble des entiers s'écrivant sous la fome ak avec $k \in \mathbb{Z}$).
2. Pour un entier a, on notera $\mathscr{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.

8 **Exercice** 18 page 126

9 **Exercice** Donner les diviseurs de 18.

10 **Exercice** 3 page 126

11 **Exercice** 5 page 126

12 **Exercice** 6 page 126
1) Déterminer $\mathscr{D}(12)$, l'ensemble des diviseurs de 12.
2) En déduire les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $a^2 - b^2 = 12$.

13 **Propriété**
Soit m et d deux entiers. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} d \text{ divise } m &\Longleftrightarrow -d \text{ divise } m \\ &\Longleftrightarrow -d \text{ divise } -m \\ &\Longleftrightarrow d \text{ divise } -m \end{aligned}$$

14 **Exercice**
Justifier le point 13.

15 **Conséquence**
Pour un entier a : $a\mathbb{Z} = (-a)\mathbb{Z}$ et $\mathscr{D}(a) = \mathscr{D}(-a)$.

16 **Exercice** 1 page 126

17 **Exercice** 2 page 126

18 **Propriété**
Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$.
Si d divise a alors tout multiple de a est multiple de d :

$$d \mid a \Longrightarrow a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$$

19 **Exercice**
Démontrer le point 18

20 **Propriété**
Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$.
Si d divise a alors tout diviseur de d est aussi diviseur de a :

$$d \mid a \Longrightarrow \mathscr{D}(d) \subset \mathscr{D}(a)$$

21 **Exercice**
Démontrer le point 20

4 Encadrement des diviseurs d'un entier

22 **Propriété** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathscr{D}(n) \subset [\![-n\ ;\ n]\!]$.

23 **Démonstration** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit d'établir que les diviseurs positifs de n appartiennent à $[\![0\ ;\ n]\!]$.
Soit d un diviseur positif de n. Il existe un entier k tel que $kd = n$. On a $k > 0$ (sinon le produit de k par d serait négatif donc distinct de n que l'on a pris positif). Comme k est entier, $k > 0$ implique $k \geqslant 1$ d'où $kd \geqslant d$, soit $n \geqslant d$. On a donc bien $d \in [\![0\ ;\ n]\!]$.

24 **Exercice**
Ecrire un programme python prenant en entrée un entier naturel n et donnant en sortie la liste des diviseurs positifs de n.

5 Transitivité de la divisibilité

25 **Propriété**
Soit a, b, c des entiers ($a \neq 0, b \neq 0$).
Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.

26 **Démonstration 1** Soit a, b, c des entiers ($a \neq 0, b \neq 0$) tels que $a \mid b$ et $b \mid c$. Il existe des entiers k et k' tels que $ak = b$ et $bk' = c$. On a donc $akk' = bk' = c$. L'entier $k'' = kk'$ est tel que $ak'' = c$, donc $a \mid c$.

27 **Démonstration 2** Soit a, b, c des entiers ($a \neq 0, b \neq 0$) tels que $a \mid b$ et $b \mid c$. On a $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{c}{b} \in \mathbb{Z}$, or $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{b} \times \dfrac{b}{a}$, donc $\dfrac{c}{a}$ est entier car produit de deux entiers. Donc $a \mid c$.

6 Combinaison linéaire

28 **Définition**
Soient a et b deux nombres. On appelle combinaison linéaire à coefficients entiers de a et b tout élément de l'ensemble $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$, c'est à dire tout nombre s'écrivant sous la forme $au + bv$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.

29 **Propriété**
Soient d, a, b des entiers avec $d \neq 0$ et soit $c \in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.
Si $d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid c$.
En d'autres termes, si $d \in \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$, alors pour tous entiers u et v, on a $d \in \mathscr{D}(au + bv)$.

30 **Démonstration – Rédaction 1.** Si $d \mid a$ et $d \mid b$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $dk = a$ et $dk' = b$. Par ailleurs, il existe u et v entiers tels que $au + bv = c$. On a donc $dku + dk'v = c$, soit $d\left(ku + k'v\right) = c$. Comme $\left(ku + k'c\right)$ est obtenu par somme et produit d'entiers, c'est un entier et on en déduit $d \mid c$.

31 **Démonstration – Rédaction 2.** Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $\dfrac{a}{d} \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{b}{d} \in \mathbb{Z}$. Pour tous entiers u et v on a donc $\dfrac{a}{d}u + \dfrac{b}{d}v \in \mathbb{Z}$ (produits et somme d'entiers), c'est à dire $\dfrac{au + bv}{d} \in \mathbb{Z}$, donc d divise $au + bv$.

32 **Vocabulaire [rappel]**
Deux entiers m et n avec $m < n$ sont dits consécutifs lorsque $n = m + 1$.

33 **Exercice**
Soit a un entier divisant deux entiers consécutifs. Démontrer que $a \in \{-1;\ 1\}$.

34 **Exercice**
1) Vérifier que $17 \mid 51$.
2) En déduire qu'aucun multiple de 17 ne s'écrit sous la forme $51n + 4$ avec n entier.

35 **Exercice** 10 page 126

36 **Exercice**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 7^n + 5$.
1) Calculer $u_{n+1} - 7u_n$.
2) En déduire une démonstration par récurrence que u_n est multiple de 3 pour tout entier naturel n.