1 Forme algébrique d'un complexe

$\boxed{1}$ **Théorème (admis)**
Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des complexes, contenant $\mathbb{R}$, et vérifiant :
1) l'addition et la multiplication des réels se prolongent aux complexes,
2) les règles de calcul restent les mêmes
3) il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que $i^2 = -1$
4) tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$ avec a et b réels,
5) cette forme $a + ib$ est dite forme algébrique du complexe,
6) la forme algébrique de 0 est $0 + 0i$.

$\boxed{2}$ **Exercice** résolu 1 page 11

$\boxed{3}$ **Exercice** 1 page 19

$\boxed{4}$ **Exercice** 4 page 19

$\boxed{5}$ **Exercice** 5 page 19

$\boxed{6}$ **Exercice** 6 page 19

$\boxed{7}$ **Définition**
Soit z un complexe de forme algébrique $z = a+ib$ (a et b réels). Le réel a est appelé partie réelle de z et on note $a = \mathfrak{Re}(z)$, Le réel b est appelé partie imaginaire de z et on note $b = \mathfrak{Im}(z)$.

$\boxed{8}$ **Exercice** 7, 8, 9, 12, 13 page 19

2 Conjugaison

$\boxed{9}$ **Définition** Soit z un complexe de forme algébrique $z = a+ib$. On appelle conjugué de z le complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a-ib$. On a donc $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\mathfrak{Im}(z)$.

$\boxed{10}$ **Exercice** Donner le conjugué des complexes $z_1 = \dfrac{2+i}{4}$, $z_2 = 3i \times (4-i)$, $z_3 = -6i + 5$.

$\boxed{11}$ **Propriété**
Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = a + ib$. Alors le produit $z\overline{z}$ est un réel positif. Plus précisément, $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

$\boxed{12}$ **Exercice**
Démontrer la propriété précédente.

$\boxed{13}$ **Remarque**
On retiendra les deux identités remarquables :
1) pour tout complexe p et tout complexe q, on a $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$.
2) pour tout complexe p et tout complexe q, on a $p^2 + q^2 = (p-iq)(p+iq)$.

$\boxed{14}$ **Preuve**
Dans les deux cas, il suffit de développer le produit pour obtenir l'autre membre de l'égalité.

3 Règles de calcul sur la conjugaison

$\boxed{15}$ **Propriété** Pour tout complexe z, on a $\overline{\overline{z}} = z$.

$\boxed{16}$ **Exercice** Démontrer la propriété précédente

$\boxed{17}$ **Propriété**
1) Pour tout complexe z et tout complexe z', on $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

$\boxed{18}$ **Exercice** Démontrer la propriété précédente

$\boxed{19}$ **Propriété**
1) Pour tout complexe z et tout complexe z', on $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\boxed{20}$ **Exercice** Démontrer la propriété précédente

$\boxed{21}$ **Propriété**
Pour tout entier positif n et tout complexe z : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

$\boxed{22}$ **Exercice** Démontrer la propriété précédente

4 Soustraction dans $\mathbb{C}$

$\boxed{23}$ **Définition**
On appelle oposé d'un complexe z tout complexe w tel que $z + w = 0$.

$\boxed{24}$ **Propriété**
Tout complexe z admet un unique opposé, que l'on note $-z$.

$\boxed{25}$ **Exercice**
Justifier la propriété précédente. Expliciter $-z$ enfonction de z.

$\boxed{26}$ **Conséquence** On peut soustraire des complexes : pour z et w deux complexes, on définit $z - w$ par $z - w = z + (-w)$.

$\boxed{27}$ **Remarque** Vous avez certainement naturellement utilisé cela dans les exercices précédents. On va faire une remarque analogue pour la division…

$\boxed{28}$ **Propriété**
Pour tout complexe z et tout complexe w, on a $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

$\boxed{29}$ **Exercice** 17 p19

5 Division dans $\mathbb{C}$

30 Définition
Pour tout complexe z, on appelle inverse de z un complexe w tel que $wz = 1$.

31 Remarque Pour tout complexe w, $0w = 0$, donc $0w \neq 1$. Donc 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$.

32 Exercice
Soit $z = a + ib$ un complexe non nul.
1) Justifier que $z\overline{z}$ est un réel positif non nul.
2) Puisque $z\overline{z}$ est un réel positif non nul, il possède un inverse (réel) : le réel $\dfrac{1}{a^2+b^2}$ et on peut donc définir le complexe
$w = \overline{z} \times \dfrac{1}{z\overline{z}}$.
3) Vérifier que w est un inverse de z.

33 Propriété Tout complexe z non nul possède un unique inverse dans $\mathbb{C}$. On note $\dfrac{1}{z}$ l'inverse du complexe non nul z.

34 Exercice
Justifier la propriété précédente.

35 Exercice Résolu 3 page 11

36 Exercice 23, 27, 28 page 19

37 Conséquence
On peut diviser un complexe z par un complexe $w \neq 0$ au sens suivant : $\dfrac{z}{w} = z \times \dfrac{1}{w}$.

38 Remarque
L'inverse d'un complexe z non nul se notera également z^{-1} et on peut vérifier que les règles usuelles sur les puissances sont conservées.

39 Exercice 24 page 19

6 Quelques règles de calcul

40 Propriété
1) Pour tout complexe z et tout complexe non nul w, on a $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
2) Pour tout complexe non nul w, on a $\overline{\left(\dfrac{1}{w}\right)} = \dfrac{1}{\overline{w}}$.

41 Exercice
Démontrer la propriété précédente

42 Exercice Résolu 2 page 11

43 Exercice 17 page 19