Trigonométrie

2023-24

1 Radian

Définition.
La mesure d'un angle en radians est une mesure proportionnelle à la mesure en degrés, le coefficient de proportionnalité est donné par la correspondance : $180° = \pi\,\text{rad}$.

Mesure en degrés	α	180
Mesure en radians	x	π
Mesure en tour de cercle	y	$\frac{1}{2}$

Exercice 1 – Donner les mesures en radians et en "tour" de cercle : 1°, 90°, 45°, 360°, 60°, 120°, 30°.

Exercice 2 – Donner les mesures en degrés : $1\,\text{rad}$, $\frac{\pi}{6}\,\text{rad}$, $\frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$, $\frac{3\pi}{4}\,\text{rad}$.

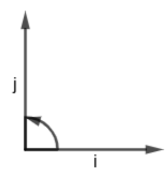
Exercice 3 – Un triangle est équilatéral. Donner les mesures de ses angles en degrés puis en radians.

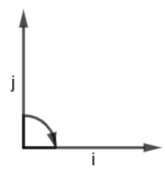
Exercice 4 – Donner les mesures des angles d'un carré en degrés et en radians.

2 Angle orienté

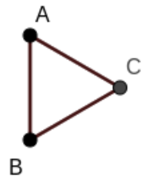
L'angle entre deux vecteurs peut être « orienté », ce qui signifie essentiellement que l'on tient compte du sens de rotation. On utilisera la convention suivante :

1. le sens de rotation dit "négatif" ou "indirect" est le sens des aiguilles d'une montre.
2. le sens de rotation contraire aux aiguilles d'une montre sera dit "positif" ou "direct".

Exemple.
Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$, on distingue l'angle $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ 

de l'angle $\left(\vec{j}\,;\vec{i}\right)$ 

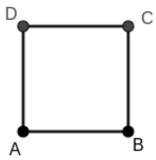
.
La mesure de $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ est $+90°$ ou encore $+\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$. Tandis que la mesure de $\left(\vec{j}\,;\vec{i}\right)$ est $-90°$ ou encore $\frac{-\pi}{2}\,\text{rad}$.

Exercice 5 – On considère le triangle équilatéral suivant : 

.

1. Donner la mesure en radians des angles $\left(\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC} \ ; \ \overrightarrow{AB}\right)$.
2. Dessiner un représentant du vecteur $\overrightarrow{CA}$ avec le point A pour origine.
3. Donner la mesure en radians des angles $\left(\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA} \ ; \ \overrightarrow{AB}\right)$

A retenir.
Pour mesurer un angle de vecteurs, raisonner uniquement à l'aide de deux représentants **de même origine** pour les deux vecteurs.

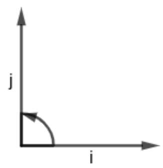
Exercice 6 – Avec le carré 

:

1. Donner la mesure (en radians) de $\left(\overrightarrow{BA} \ ; \ \overrightarrow{BC}\right)$ puis celle de $\left(\overrightarrow{BC} \ ; \ \overrightarrow{BA}\right)$.
2. Donner la mesure (en radians) de $\left(\overrightarrow{BA} \ ; \ \overrightarrow{CB}\right)$ puis celle de $\left(\overrightarrow{CB} \ ; \ \overrightarrow{BA}\right)$.

3 Mesure modulo 2π

Une mesure d'angle de vecteurs est définie modulo 2π. Nous voyons un exemple ci-dessous pour comprendre ce que cela signifie.

Prenons l'exemple de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ 

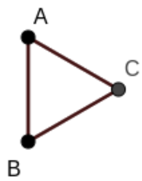
tels que $\left(\vec{i} \ ; \ \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$ rad. Pensons ces deux vecteurs comme deux aiguilles d'une montre. Supposons que l'aiguille $\vec{i}$ est bloquée et reste immobile tandis que l'aiguille $\vec{j}$ continue à tourner. Lorsque $\vec{j}$ aura effectuer un tour complet (par exemple dans le sens des aiguilles d'une montre), on pourrait considérer que l'angle entre les deux aiguilles n'est plus d'un quart de tour mais d'un quart de tour moins un tour complet ("moins" car le sens des aiguilles d'une montre est compté en négatif). On peut ainsi considérer que le nombre $\frac{\pi}{2} - 2\pi$ (un quart de tour - un tour complet exprimé en radians) est aussi une mesure de l'angle $\left(\vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.
En faisant faire plusieurs tours à l'aiguille $\vec{j}$ dans le sens des aiguilles d'une montre, on décide que $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 2 \times 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 3 \times 2\pi$, ..., $\frac{\pi}{2} - k \times 2\pi$ (avec k entier positif) sont des mesures de l'angle $\left(\vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.
De même en tournant l'aiguille dans le sens direct, les nombres $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 3 \times 2\pi$, ..., $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ (avec k entier positif) sont des mesures de l'angle $\left(\vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.

On peut considérer dans l'exemple donné que la prise en compte des tours de cadran dans la mesure donnée permet de mesurer le temps écoulé depuis une date 0. Nous verrons que, en sciences-physiques, c'est souvent ainsi (mesure du temps écoulé) que sera utile cette notion de mesure modulo un tour complet.

Définition.
On dira que deux nombres x et x' sont deux mesures d'un même angle de vecteurs si la différence entre ces deux nombres est de la forme $k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
On notera $x \equiv x' \pmod{2\pi}$ ou encore $x = x' \pmod{2\pi}$. On a donc :

$$x = x' \pmod{2\pi} \Longleftrightarrow x - x' \text{ s'écrit sous la forme } 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque
On écrira par exemple $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ pour signifier que l'angle orienté $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Exercice 7 – On considère le triangle équilatéral suivant : 

.

1. Donner **les** mesures en radians des angles $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$.
2. Dessiner un représentant du vecteur $\overrightarrow{CA}$ avec le point A pour origine.
3. Donner **les** mesures en radians des angles $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 8 – Dans chacun des cas c-dessous, dire si les deux nombres sont mesures d'un même angle de vecteurs :
a) $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{3\pi}{2}$. b) $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{9\pi}{4}$. c) $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{-9\pi}{4}$. d) $a = \frac{\pi}{4}$ et $b = \frac{-7\pi}{4}$. e) $a = 0$ et $b = 2\pi$. f) $a = 0$ et $b = -1000\pi$. g) $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{16\pi}{3}$. h) $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{-35\pi}{3}$.

4 Mesure principale

Plusieurs nombres peuvent être mesures d'un même angle de vecteurs : on décide d'en privilégier un parmi ceux-là que l'on nommera mesure principale de l'angle.

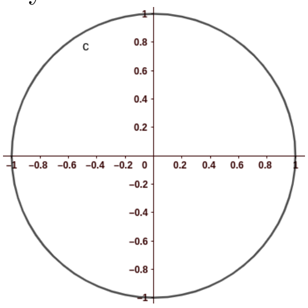
Définition.
On appelle **mesure principale** d'un angle de vecteur la mesure (en radians) de cet angle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Remarque
Le choix de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est arbitraire : l'important est d'avoir un intervalle de longueur 2π (un tour complet !). On aurait pu par exemple choisir l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi[$.

Exercice 9 – Donner la mesure principale associée à la mesure donnée :
a) $x=4\pi$ b) $x=-11\pi$ c) $x=\dfrac{15\pi}{2}$ d) $x=\dfrac{56\pi}{3}$ e) $x=\dfrac{7\pi}{4}$

5 Le cercle trigonométrique

Définition.
Dans un repère du plan, on appelle cercle trigonométrique le cercle centré sur l'origine du repère et de rayon 1.

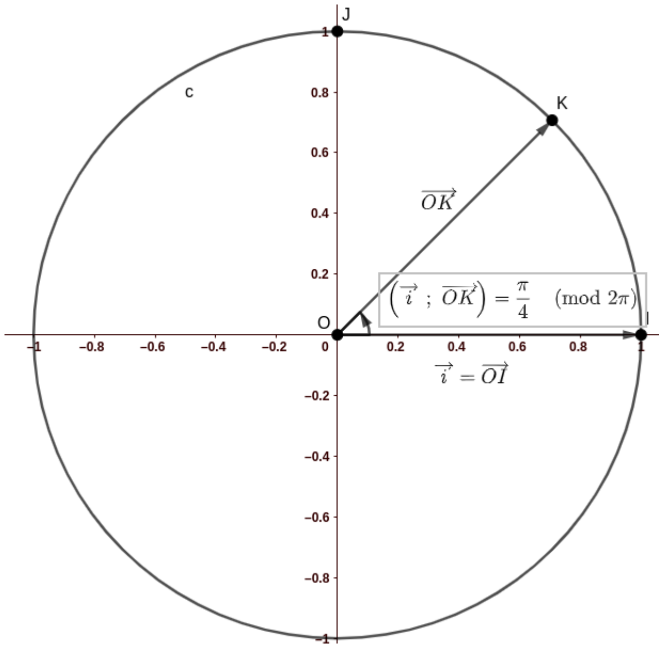


Ce cercle servira de "référence" pour quelques angles classiques. Nous allons associer certains points du cercle à certains angles (dont il faudra connaître le cosinus et le sinus).

Sur ce cercle, les angles seront mesurés à partir du vecteur $\vec{i}$ du repère.

Par exemple :

- Le point $I(1;0)$ est associé à 0 car l'angle $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OI}\right)$ a pour mesure 0 rad (modulo 2π). On associe donc I également aux nombres $0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.
- Le point $J(0;1)$ est associé à $\dfrac{\pi}{2}$ car l'angle $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OJ}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$ rad (modulo 2π). On associe J également aux nombres $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.
- Le point K ci-dessous placé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOJ}$ est associé à $\dfrac{\pi}{4}$ car l'angle $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OK}\right)$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ rad (modulo 2π) (rappel : $\dfrac{\pi}{4}$ rad = 45°). On associe K également aux nombres $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.



Exercice 10 – Sur le cercle ci-dessus :

a) Placer les points demandés,

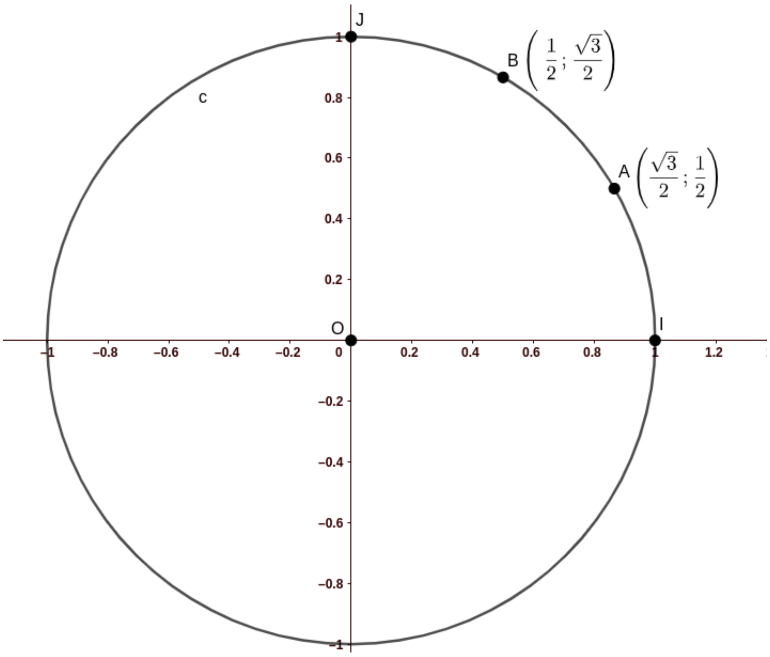
b) donner leurs coordonnées

c) dire à quel(s) nombre(s) ils sont associés.

On admettra que K a pour couple de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1. I' symétrique de I par rapport à l'origine du repère.
2. J' symétrique de J par rapport à l'origine du repère.
3. K' symétrique de K par rapport à l'origine du repère.
4. K'' symétrique de K par rapport à l'axe (OJ).
5. K''' symétrique de K par rapport à l'axe (OI).

Exercice 11 – Sur le cercle ci-dessous, on a placé le point A associé à $\dfrac{\pi}{6}$ et le point B associé à $\dfrac{\pi}{3}$. On a indiqué leurs coordonnées.



Sur ce cercle :

a) Placer les points demandés,

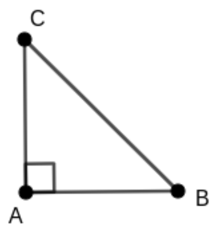
b) donner leurs coordonnées,

c) dire à quel(s) nombre(s) ils sont associés.

1. A′ symétrique de A par rapport à l'origine du repère.
2. A″ symétrique de A par rapport à l'axe (OJ).
3. A‴ symétrique de A par rapport à l'axe (OI).
4. B′ symétrique de B par rapport à l'origine du repère.
5. B″ symétrique de B par rapport à l'axe (OJ).
6. B‴ symétrique de B par rapport à l'axe (OI).

6 Cosinus et sinus

casotoa(rappel de collège).



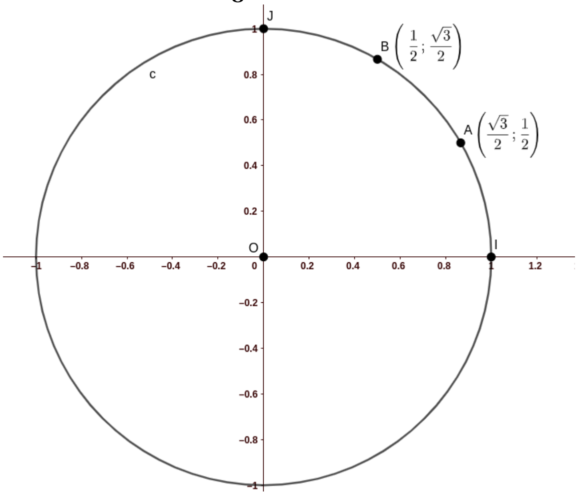
Dans un triangle ABC rectangle en A :

$\cos\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{BA}{BC}$

$\sin\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

$\tan\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{\cos\left(\widehat{B}\right)}$

Exercice 12 – Sur le cercle déjà utilisé dans l'exercice précédent, on a placé le point A associé à $\dfrac{\pi}{6}$ et le point B associé à $\dfrac{\pi}{3}$. On a indiqué leurs coordonnées.

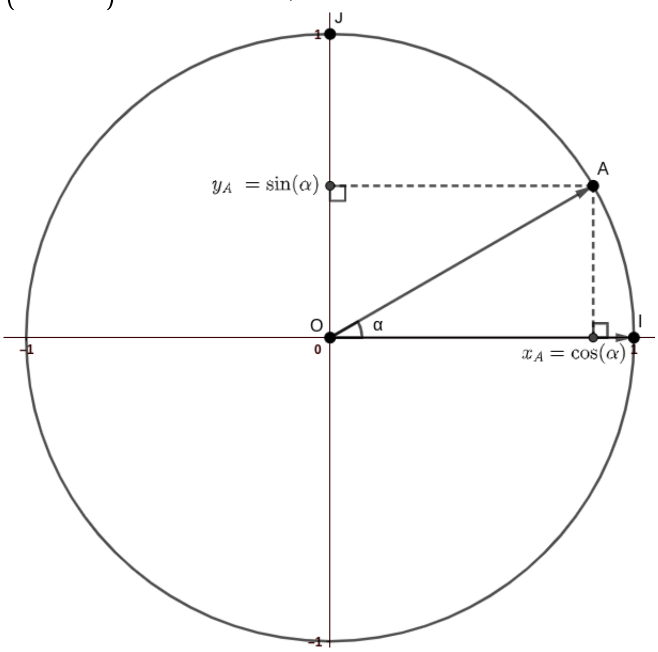


A l'aide de ces données :

a) Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. b) Déterminer $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. c) Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. d) Déterminer $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

On remarque sur ces exemples que lorsque le nombre réel x est associé au point A du cercle trigonométrique, le couple $(\cos(x); \sin(x))$ est le couple des coordonnées du point A.
Cela permet de définir la notion de cosinus et sinus d'un réel quelconque.

Définition.
Soit x un nombre réel et A le point du cercle trigonométrique associé à x (c'est à dire le point A tel que $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right) = x \pmod{2\pi}$). On définit alors $\cos(x)$ et $\sin(x)$ par l'égalité $(\cos(x)\ ;\ \sin(x)) = \left(x_A\ ;\ y_A\right)$.



La propriété suivante est une conséquence directe de cette définition.

Propriété.
Pour tout réel x, on a $\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$.

Remarque
L'écriture $\cos^2(x)$ est une abréviation pour $(\cos(x))^2$. De même $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$.

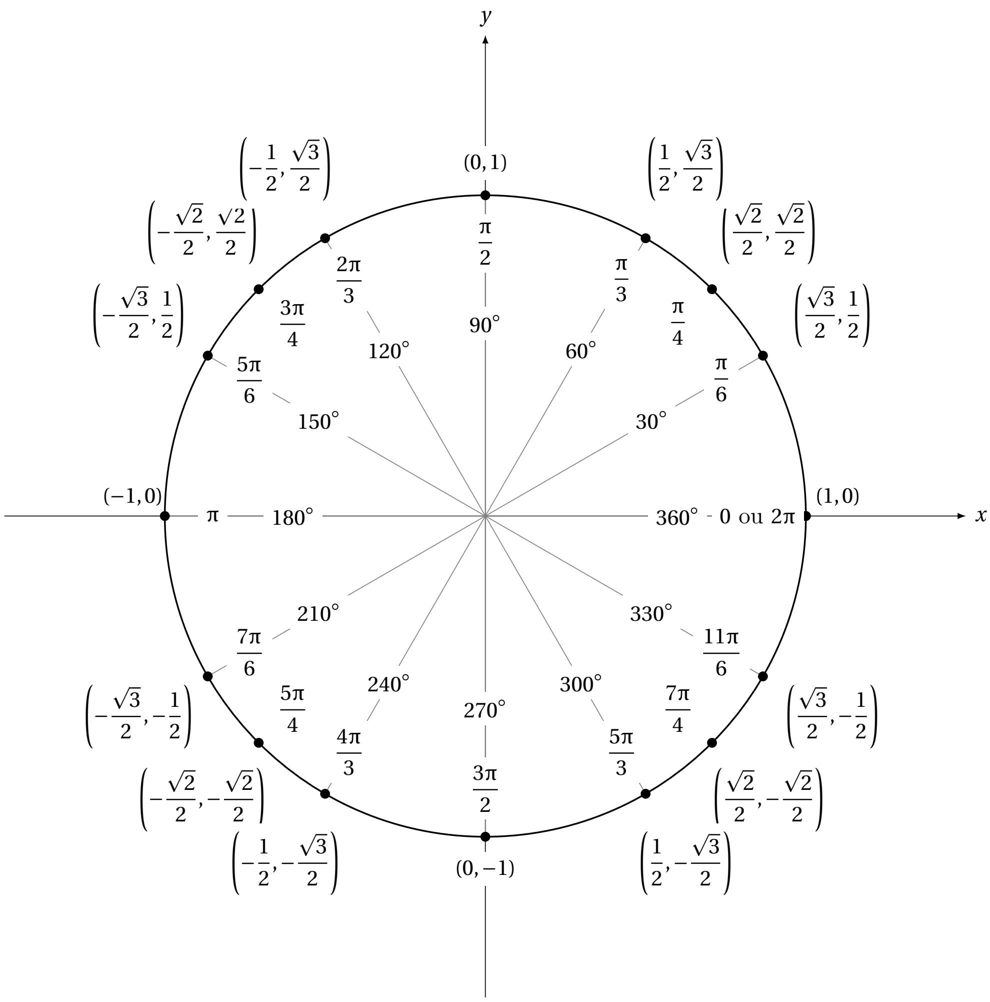
Exercice 13 – Justifier la propriété précédente.

Exercice 14 –
1. Soit $x \in]-\pi\ ;\ 0]$ tel que $\cos(x) = 0{,}1$. Quelle est la valeur de $\sin(x)$?
2. Soit $x \in]0\ ;\ \pi]$ tel que $\cos(x) = 0{,}1$. Quelle est la valeur de $\sin(x)$?

Exercice 15 – Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = 0{,}25$. Quelle est la valeur de $\cos(x)$?

7 Quelques valeurs à connaître par coeur

Il faut connaître par coeur les valeurs de la figure ci-dessous.



Exercice 16 – Sur le demi-cercle "inférieur", ce sont les mesures dans $]\pi\ ;\ 2\pi[$ qui ont été indiquées. Compléter la figure en indiquant également la mesure principale correspondante.

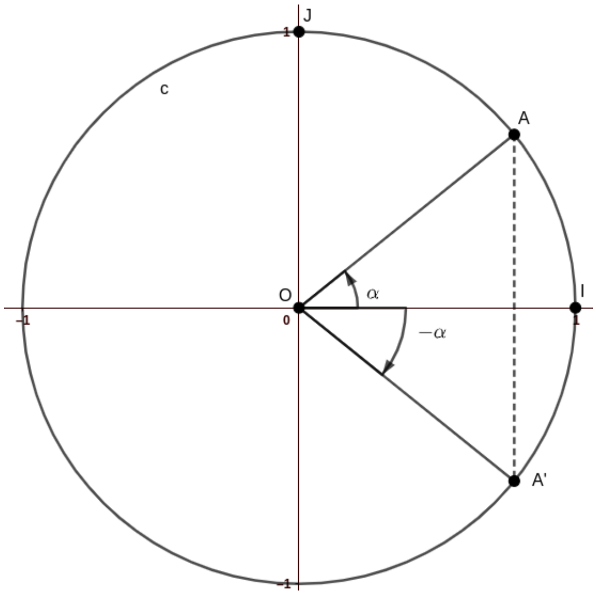
Pour apprendre les valeurs ci-dessus, on retient essentiellement les valeurs du "premier" quart de cercle (tableau ci-dessous) et les relations et symétries du paragraphe qui suit.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

8 Quelques formules

8.1 Symétrie par rapport à l'axe (Ox)

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point A′ est symétrique de A par rapport à l'axe (Ox).
Par symétrie, les angles sont opposés : $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OA'}\right) = -\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right)$. Et par symétrie, on le lien suivant entre les coordonnées cartésiennes de A et celles de A′ : $\left(x'_A\ ;\ y'_A\right) = \left(x_A\ ;\ -y_A\right)$

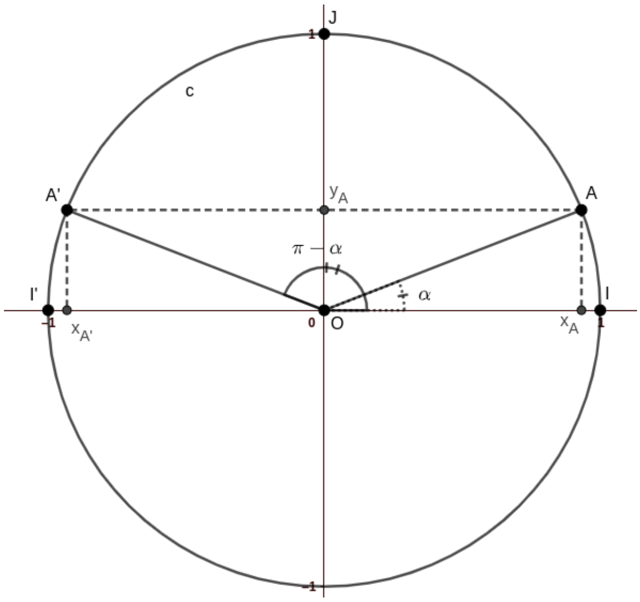


On a donc :

Propriété.
Pour tout réel α : $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)}$ et $\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)}$

8.2 Symétrie par rapport à l'axe (Oy)

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point A$'$ est symétrique de A par rapport à l'axe (Oy).
Par symétrie : $\left(\overrightarrow{OA'}\ ;\ \overrightarrow{OI'}\right) = -\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right)$. D'où $\left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OA'}\right) = \pi - \left(\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right)$. Et par symétrie, on a le lien suivant entre les coordonnées cartésiennes de A et celles de A$'$: $\left(x'_A\ ;\ y'_A\right) = \left(-x_A\ ;\ y_A\right)$

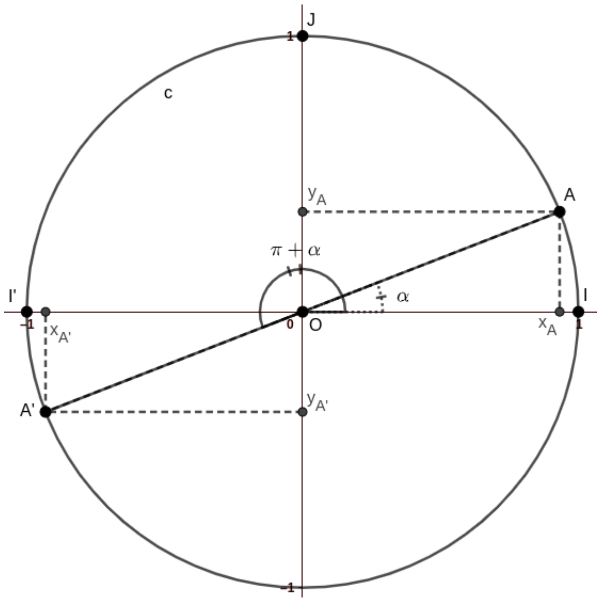


On a donc :

Propriété.
Pour tout réel α : $\boxed{\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)}$ et $\boxed{\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)}$

8.3 Symétrie par rapport à l'origine

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point A′ est symétrique de A par rapport à l'origine du repère. Par symétrie : $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}'}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right) = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$. D'où $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$. Et par symétrie, on le lien suivant entre les coordonnées cartésiennes de A et celles de A′ : $\left(x'_{\mathrm{A}}\ ;\ y'_{\mathrm{A}}\right) = \left(-x_{\mathrm{A}}\ ;\ -y_{\mathrm{A}}\right)$

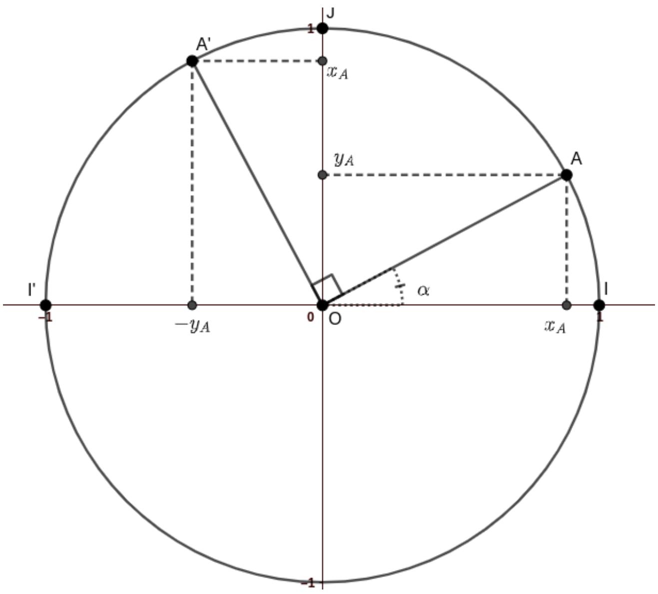


On a donc :

Propriété.
Pour tout réel α : $\boxed{\cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)}$ et $\boxed{\sin(\pi+\alpha) = -\sin(\alpha)}$

8.4 Quart de tour direct

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, le point A′ est obtenu comme image de A par un quart de tour direct, c'est à dire une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



On aadmettra :

Propriété.
Pour tout réel α : $\boxed{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\alpha)}$ et $\boxed{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha)}$

8.5 Des tours complets

Lorsqu'on tourne d'un tour complet, on retombe sur le même point du cercle, d'où les formules :

Propriété.
Pour tout réel x : $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.
Et plus généralement, pour tout entier relatif k et tout réel x : $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$.

Vocabulaire. On dit que la fonction cosinus est périodique de période 2π pour traduire la propriété «Pour tout réel x : $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$».
De même, la fonction sinus est périodique de période 2π. On dit également 2π-périodique pour abréger.

8.6 Exercices

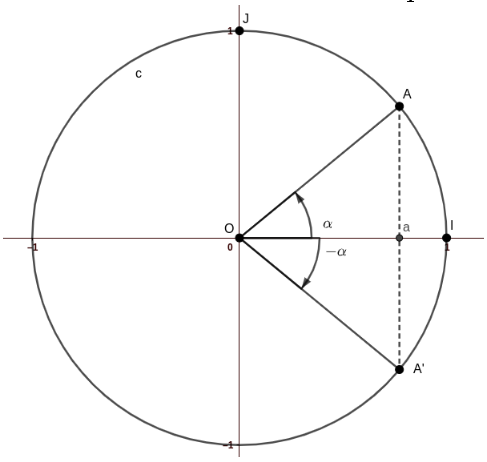
Exercice 17 – Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, déterminer :
a) $\cos\left(\frac{-\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right)$. b) $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. c) $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$. d) $\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$.

Exercice 18 – En utilisant les formules précédentes, exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Exercice 19 – Sachant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, déterminer :
a) $\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$. b) $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$. c) $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$. d) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

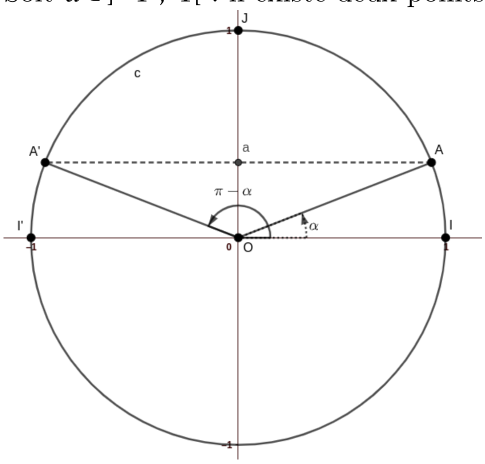
9 Quelques équations

Soit $a\in\,]-1\,;\,1[$: il existe deux points sur le cercle trigonométrique ayant pour abscisse a.



La conséquence est que l'équation $\cos(x)=a$ possède deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ des mesures principales. Ces deux solutions sont opposées : si α est l'une des solutions alors $-\alpha$ est l'autre solution.

Soit $a\in\,]-1\,;\,1[$: il existe deux points sur le cercle trigonométrique ayant pour ordonnée a.



La conséquence est que l'équation $\sin(x)=a$ possède deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ des mesures principales. Ces deux solutions sont supplémentaires (leur somme est égale à π) : si α est l'une des solutions alors $\pi-\alpha$ est l'autre solution.

Exercice 20 – Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle des mesures principales puis dans $\mathbb{R}$:
a) $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos(x)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin(x)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin(x)=0$ e) $\sin(x)=1$ f) $\cos(x)=0$ g) $\cos(x)=1$ h) $\sin(x)=\dfrac{-1}{2}$ i) $\cos(x)=\dfrac{-1}{2}$

Exercice 21 – Résoudre les systèmes d'équations suivants dans l'intervalle des mesures principales puis dans $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

10 Signe d'un cosinus, d'un sinus

Exercice 22 – 1. En vous aidant du cercle trigonométrique, répondre aux questions suivantes :

(a) Quel est le signe de $\cos(x)$ lorsque x est un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{-\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$?

(b) Dresser le tableau des signes de $\cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$.

(c) Dresser le tableau des signes de $\cos(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

2. Dresser le tableau des signes de $\sin(x)$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 2\pi]$.