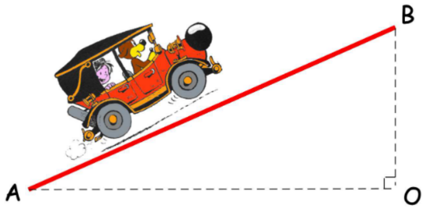
1 Pente d'un segment de route

1 Définition

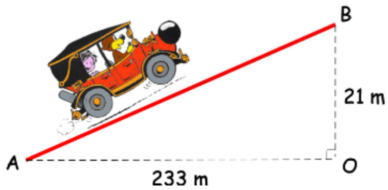
La pente d'une route (segment de droite) est le rapport du dénivelé (différence de la hauteur maximale et de la hauteur minimale) par la distance horizontale parcourue. La pente de la route (AB) est donc le rapport $\dfrac{OB}{OA}$ sur la figure.



2 Remarque En reprenant la figure précédente, la pente de la route (AB) est aussi la tangente de l'angle $\widehat{OAB}$:

$$\tan\left(\widehat{OAB}\right) = \frac{OB}{OA} = \frac{\sin\left(\widehat{OAB}\right)}{\cos\left(\widehat{OAB}\right)}.$$

3 Exercice



Quelle est la pente de cette route ?

4 Exercice

Sur une route, on trouve la pancarte suivante :

Pour une avancée de 100 mètres à l'horizontale, de quelle altitude descend-on ?

2 Pente d'un segment dans un repère

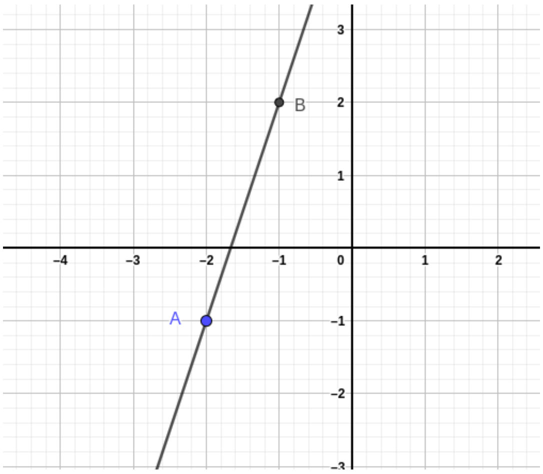
La définition de la pente d'un segment dans un repère est la même que pour une route. Mais on donne un signe (positif ou négatif) à cette pente :

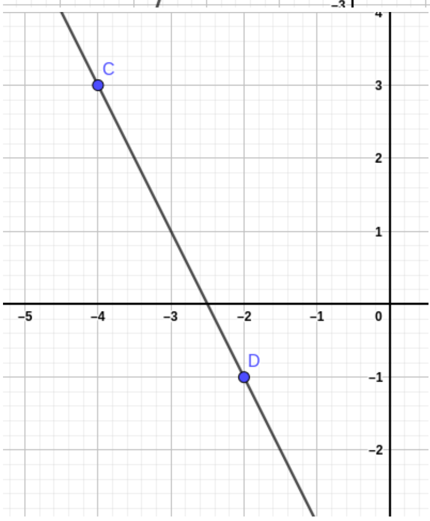
1. Un déplacement horizontal dans le sens croissant des abscisses (souvent de la gauche vers la droite) est compté positivement.
2. Un déplacement horizontal dans le sens décroissant des abscisses est compté négativement.
3. Un déplacement vertical dans le sens croissant des ordonnées (souvent du bas vers le haut) est compté positivement.
4. Un déplacement vertical dans le sens décroissant des ordonnées est compté négativement.

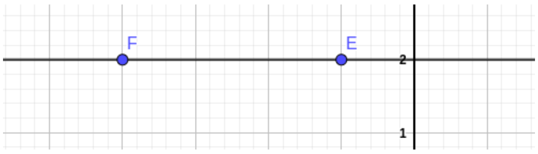
5 Remarque

On pourra retenir que la pente (ou coefficient directeur) pour un segment ou une droite) est le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, qu'on peut retenir sous la forme pente $= \dfrac{\Delta\text{vertical}}{\Delta\text{horizontal}}$.

6 Exercice Donner la pente des segments $[AB]$, $[CD]$, $[EF]$ ci-dessous.



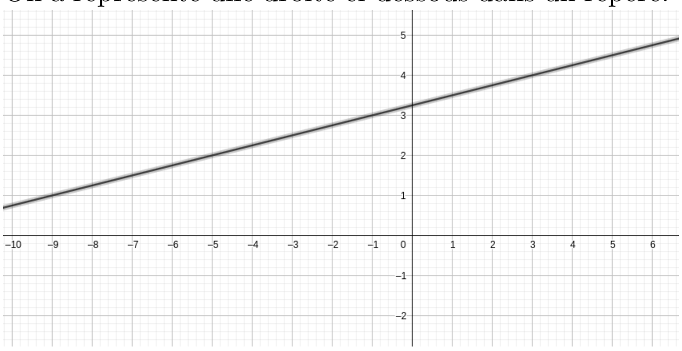




7 **propriete** [rappel]
Soit d une droite dans un repère (non parallèle à l'axe des ordonnées).
Soient A, B, C, D quatre points distincts sur cette droite. Alors la pente du segment $[AB]$ est la même que la pente du segment $[CD]$. Cette pente est nommée pente de la droite d.
La pente de la droite (AB) est donc $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ou encore $p = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$

8 **Remarque** La pente de la droite (AB) est aussi le quotient $p = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, en d'autres termes, la pente de la droite (AB) est aussi la pente de la droite (BA).

9 **Exercice**
On a représenté une droite ci-dessous dans un repère.



Quelle est sa pente ?

3 Taux de variation d'une fonction

10 **Définition**
Soit f une fonction définie sur un intervalle J. Soit $x \in J$ et $x' \in J$, $x \neq x'$. On appelle taux de variation de f entre x et x' la pente du segment $[AB]$ où $A\,(x\,;\,f(x))$ et $B\left(x'\,;\,f(x')\right)$ sont deux points de la courbe représentant f . Le taux de variation de f entre x et x' est donc le nombre : $\boxed{\tau_f(x,x') = \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}}$.

11 **Remarque**
Pour deux nombres a et b, on a $b - a = (-1)(a - b)$.

12 **Exercice**
Justifier la remarque précédente.

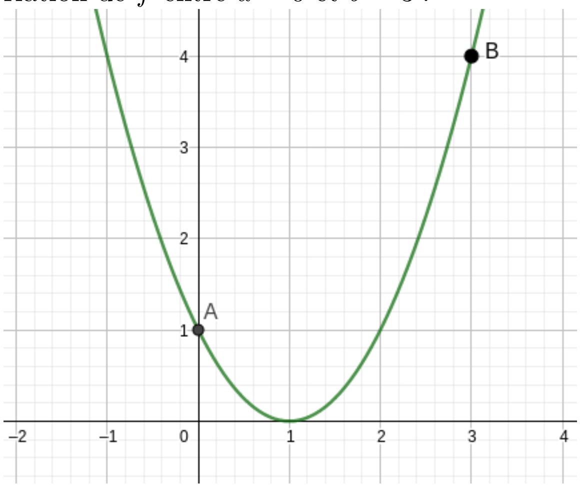
13 **Remarque** Le taux de variation de f entre x et x' est égal au taux de variation de f entre x' et x.

14 **Exercice**
Justifier la remarque précédente.

15 **Exercice** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

1. Quelle est l'image de 1 par f ?
2. Quelle est l'image de 2 par f ?
3. Quel est le taux de variation de f entre $a = 1$ et $b = 2$?
4. Quel est le taux de variation de f entre $c = 2$ et $d = 3$?

16 **Exercice** On a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction f.
1) Par lecture graphique, déterminer le taux de variation de f entre $a = 0$ et $b = 3$?



2) Quelle est l'équation de la droite (AB) (la droite (AB) est appelée une sécante à la courbe) ?

17 **Exercice**
Soit f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$. Quel est le taux de variation de f entre 3 et 7 ?

18 **Exercice**
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Quel est le taux de variation de f entre 1 et 3 ?

4 Fonction à taux de variation constant

19 **Exercice**

1. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$.

(a) Déterminer le taux de variation de f entre 2 et 6.

(b) Déterminer le taux de variation de f entre 5 et 11.

(c) Déterminer le taux de variation de f entre x et x' où x et x' sont deux réels quelconques, $x \neq x'$.

2. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = px + k$. Vérifier que le taux de variation de f entre deux nombres distincts x et x' est toujours le même (quelles que soient les valeurs de x et x' choisies).

$\boxed{20}$ **propriete** Soit f une fonction affine, c'est à dire une fonction de la forme $f(x) = px+k$ où p et k sont deux réels.

1. Alors le taux de variation de f entre deux réels quelconques est toujours le même : c'est le nombre p coefficient de x. On nommera **pente** de la fonction affine ce taux constant.
2. On rappelle que la fonction affine $f\colon x \longmapsto px+k$ est représentée par une droite : la droite d'équation $y = px+k$. p est la pente (ou encore coefficient directeur de cette droite).
3. Ainsi la pente d'une droite représentant une fonction affine est le taux de variation de la fonction affine associée à cette droite entre deux réels quelconques.

Réciproquement, toute fonction à taux de variation constant est une fonction affine :

$\boxed{21}$ **propriete** Soit f une fonction définie sur un intervalle J. S'il existe un réel p tel que pour tout réel $x \in J$ et tout réel $x' \in J$, $x' \neq x$, on a $\tau_f(x;x') = p$ alors f est une fonction affine de la forme $f(x) = px + k$.

$\boxed{22}$ **preuve**

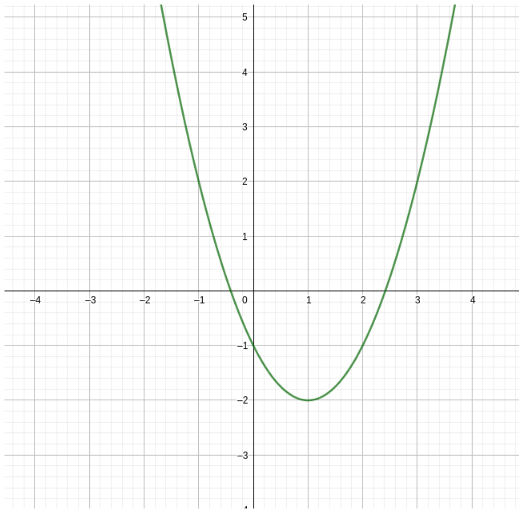
Fixons x_0 élément de J. Pour tout réel $x \neq x_0$ de J, on a : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = p$, d'où $f(x) - f(x_0) = p(x - x_0)$, soit $f(x) = px + k$ où $k = -px_0 + f(x_0)$.

$\boxed{23}$ **rmq** On peut retenir que les fonctions à taux de variation constant sont exactement les fonctions affines.

5 Sécante à une courbe

$\boxed{24}$ **Définition** Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On appelle droite sécante à la courbe $\mathcal{C}$ toute droite passant par deux points A et B de la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{25}$ **Exercice** On a représenté ci-dessous la courbe



d'une fonction f.

1) Tracer la sécante (AB) où A est le point de la courbe d'abscisse 0 et B le point de la courbe d'abscisse 3.

1.1) Quel est le coefficient directeur de la sécante (AB) à $\mathcal{C}$?

1.2) Quel est le taux de variation de f entre x_A et x_B ?

$\boxed{26}$ **Propriété** Soit f une fonction et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{C}$, la sécante (AB) a pour coefficient directeur le taux de variation de f entre x_A et x_B.

$\boxed{27}$ **preuve** Le coefficient directeur de la droite (AB) est $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Comme A est un point de la courbe représentant f, on a $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$. Donc $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ soit $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tau_f(x_A\ ;\ x_B)$.

6 Equation de droite

Une droite d dans un repère passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; yB)$ (avec $x_B \neq x_A$) a pour équation $y = px + k$ où p est la pente du segment

$[AB]$, c'est à dire $p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et où k est tel que $y_A = px_A + k$.

$\boxed{28}$ **Exercice**

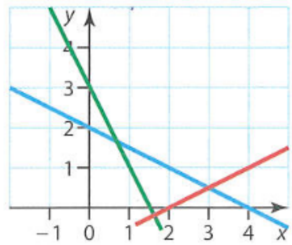
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 5$. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f dans un repère du plan.

$\boxed{29}$ **Exercice** Tracer la droite Δ d'équation $y = 0{,}5x - 3$ dans un repère du plan.

$\boxed{30}$ **Exercice** Dans un repère du plan, tracer la droite passant par $A(4; 1)$ et de coefficient directeur $p = -2$.

$\boxed{31}$ **Exercice** 17 page 65

17 Déterminer graphiquement l'équation réduite de chacune des droites représentées ci-dessous.



$\boxed{32}$ **Exercice** 49 page 69
Déterminer l'expression algébrique de $f(x)$ en fonction de x, le graphe de f étabt donné ci-dessous.