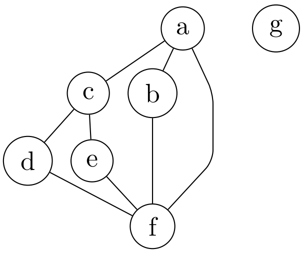
Contrôle ✎

NOM et PRÉNOM :

Barème sur 26 points.

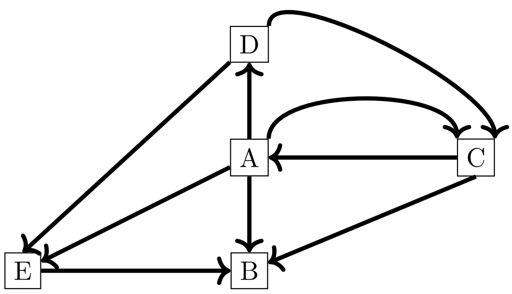
Exercice 1 (5 points) –
Avec le graphe représenté ci-dessous :



1. Quels sont les voisins du sommet e ?
2. Quelle est la taille du graphe ?
3. Citer **tous** les couples de sommets adjacents.
4. Quel est le degré du sommet a ?
5. Quel est l'ordre du graphe ?

Résolution.
1. Les voisins du sommet e sont les sommets c et f.
2. La taille du graphe est le nombre d'arêtes : cette taille est donc égale à 8.
3. Les couples de sommets adjacents : (a,c), (a,b), (a,f), (c,d), (c,e), (b,f), (d,f), (e,f). Remarque : le couple (a,c) n'est pas égal au couple (c,a). Toutefois ici, les deux couples représentent la même arête, on n'attendait donc pas nécessairement que vous donniez les deux couples, un seul suffit.
4. Le degré du sommet a est égal à 3.
5. L'ordre du graphe est son nombre de sommets, il est égal à 7.

Exercice 2 (2 points) –
Avec le graphe représenté ci-dessous :



1. Quel est le degré entrant de A ?
2. Quel est le degré sortant de A ?

Résolution.
1. Le degré entrant de A est le nombre de flèches qui arrivent sur A, il y en a 1.
2. Le degré sortant de A est le nombre de flèches qui partent de A, il y en a 4.

Exercice 3 (2 points) –
Le tableau ci-dessous correspond à la matrice d'adjacence d'un graphe. Ce graphe est-il un graphe orienté ou non orienté ? Justifier.

	A	B	C	D
A	0	0	0	1
B	1	0	1	0
C	0	0	0	0
D	1	1	0	0

Résolution.
Le graphe est orienté. S'il était non orienté, sa matrice serait symétrique par rapport à la diagonale principale. La non symétrie s'observe ici par exemple en constatant que la cellule ligne B, colonne A vaut 1 alors que la cellule symétrique ligne A, colonne B vaut 0.

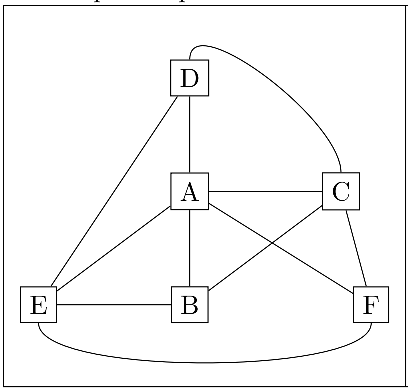
Exercice 4 (2 points) –
La matrice d'adjacence d'un graphe orienté est la suivante :

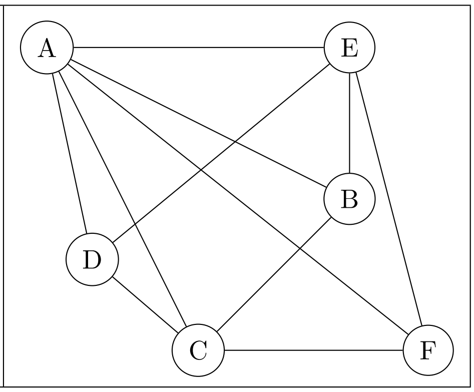
	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	1
B	0	0	0	0	1
C	1	0	0	1	0
D	0	0	1	0	0
E	0	0	0	0	0

1. Donner le degré entrant de C.
2. Donner le degré sortant de C.

Résolution.
1. Le degré entrant de C est égal à 1.
2. Le degré sortant de C est égal à 2.

Exercice 5 (3 points) –
Ci-dessous, on trouve deux représentations de graphes. S'agit-il du même graphe ? Expliquez clairement la méthode utilisée pour répondre.





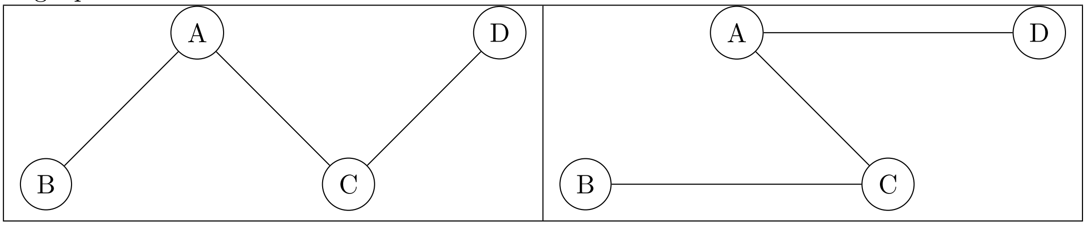
Résolution.
On commence par dresser la matrice d'adjacence du graphe de gauche :

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	1	1
B	1	0	1	0	1	0
C	1	1	0	1	0	1
D	1	0	1	0	1	0
E	1	1	0	1	0	1
F	1	0	1	0	1	0

On vérifie ensuite que cette matrice convient également pour le graphe de droite. Cela montre qu'il s'agit du même graphe.

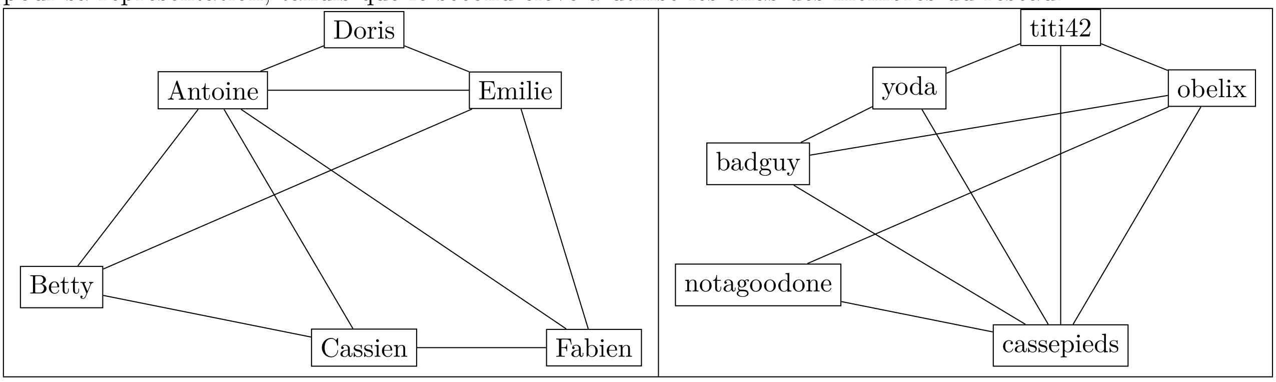
Remarque.

Certains ont écrit que les graphes étaient les mêmes parce que A avait même degré sur les deux, B avait même degré sur les deux, etc... Ce critère **n'est pas suffisant**. Vous vérifierez par exemple ci-dessous que A est de degré 2 sur les deux graphes, B est de degré 1 sur les deux graphes, C est de degré 2 sur les deux graphes, D est de degré 1 sur les deux graphes... mais pourtant les voisins de A par exemple ne sont pas les mêmes sur les deux graphes. Si ces graphes représentent des liens d' «amitié» sur un réseau social, les amis de A n'étant pas les mêmes sur les deux graphes, il ne s'agit pas du même réseau...



Exercice 6 (4 points) –

On a demandé à deux élèves de représenter le graphe des amitiés d'un mini réseau. Mais un élève a utilisé les prénoms pour sa représentation, tandis que le second élève a utilisé les alias des membres du réseau.



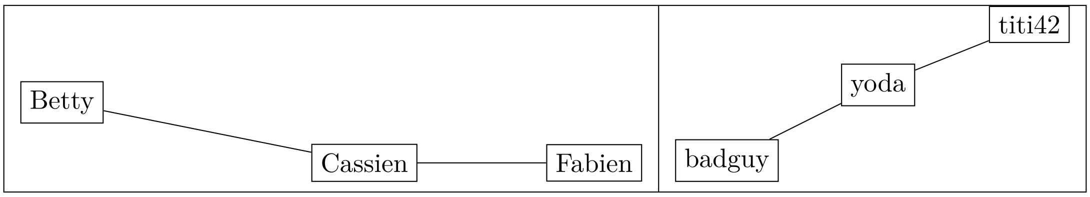
1. Expliquez pourquoi on peut être certain que l'alias d'Antoine est cassepieds.
2. Donner, en justifiant, l'alias de Doris.
3. Donner, en justifiant, l'alias d'Emilie.
4. Donner un raisonnement permettant de connaître l'alias de Cassien.

Résolution.

1. Antoine est le seul sommet de degré 5 dans le graphe de gauche et cassepieds est le seul sommet de degré 5 dans celui de droite. Puisqu'il s'agit de graphes traduisant les mêmes liens, Antoine a pour alias cassepieds.

   Remarque. Attention à la rédaction. Il ne suffit pas d'écrire que Antoine correspond à cassepieds parce qu'ils ont tous deux un degré égal à 5. Il est nécessaire de remarquer également qu'ils sont **les seuls** à avoir ce degré.
2. Doris est le seul sommet de degré 2 à gauche. notagoodone est le seul sommet de degré 2 à droite. Donc Doris a pour alias notagoodone.
3. De même Emilie est le seul sommet de degré 4 dans le graphe de gauche. Donc Emilie a pour alias obelix, seul sommet de degré 4 dans le graphe de droite.
4. On ne peut pas utiliser seulement le critère du degré puisque les trois sommets non encore associés à leurs alias ont tous un degré égal à 3. On remarque par contre que Cassien est le seul sommet du graphe gauche non relié à Emilie. Yoda étant le seul sommet du graphe droit non relié à obelix, alias d'Emilie, on en déduit que yoda est l'alias de Cassien.

   Un autre argument trouvé par certains d'entre vous : on isole un «sous-graphe» en ne retenant que les trois sommets de degré 3 non encore identifiés (ce qui revient à imaginer que l'on désabonne du réseau tous les autres, en ne gardant donc que les liens de ceux qui restent dans le réseau). Cela donne :



Dans ce sous-graphe, on voit que Cassien est le seul de degré 2 à gauche, et yoda le seul de degré 2 à droite.

Exercice 7 (3 points) –

1. Tiktok revendique aujourd'hui 1 milliard d'utilisateurs réguliers. On décide de stocker la matrice d'adjacence d'un graphe de 1 milliard de sommets en utilisant un bit pour traduire la présence ou l'absence d'un arc entre deux sommets (comme expliqué dans le cours : un 0 traduit l'absence d'arc, un 1 traduit la présence d'un arc). Quelle est la taille en bits d'une telle matrice d'adjacence ?
2. Un CD a une capacité de 700 000 000 octets. Je possède 100 CD sur lesquels de la musique est enregistrée. Je veux sauvegarder tous ces CD sur un disque dur. De quelle place ai-je besoin ? Vous répondrez en Go.

Résolution.

1. Le nombre de sommets est 1 milliard, soit 10^9. Le nombre de bits utilisé pour la matrice d'adjacence est donc de $10^9 \times 10^9 = 10^{18}$.
2. J'ai besoin de $100 \times 700\,000\,000 = 70\,000\,000\,000$ octets, c'est à dire 70 Go.

Exercice 8 (1 point) –

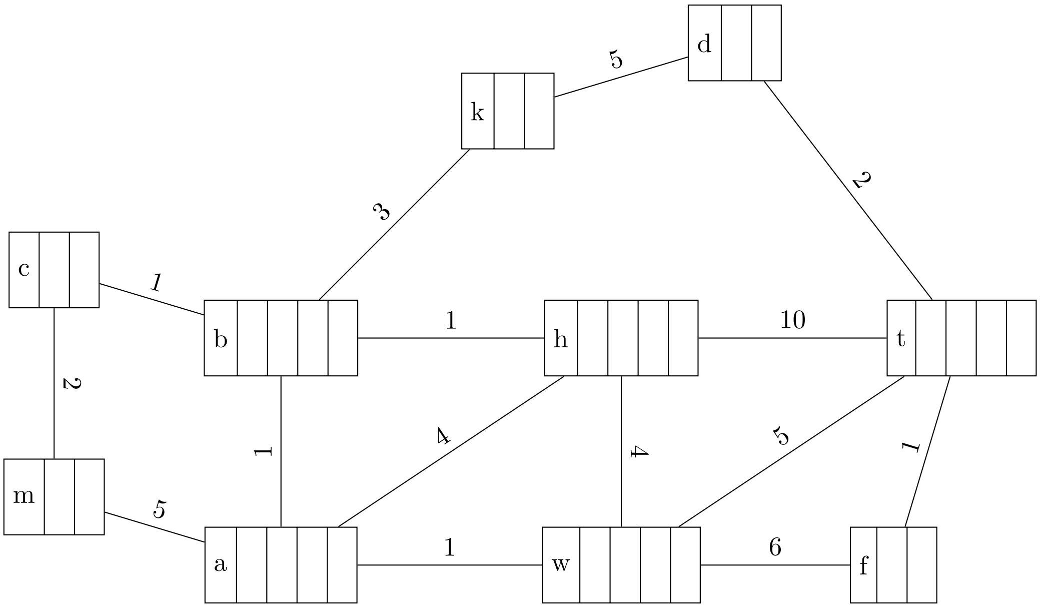
Sur une machine 64 bits, on utilise des «mots» de 64 bits. Combien d'octets comporte un mot de 64 bits ?

Résolution.

$64 = 8 \times 8$. 64 bits correspondent à 8 octets.

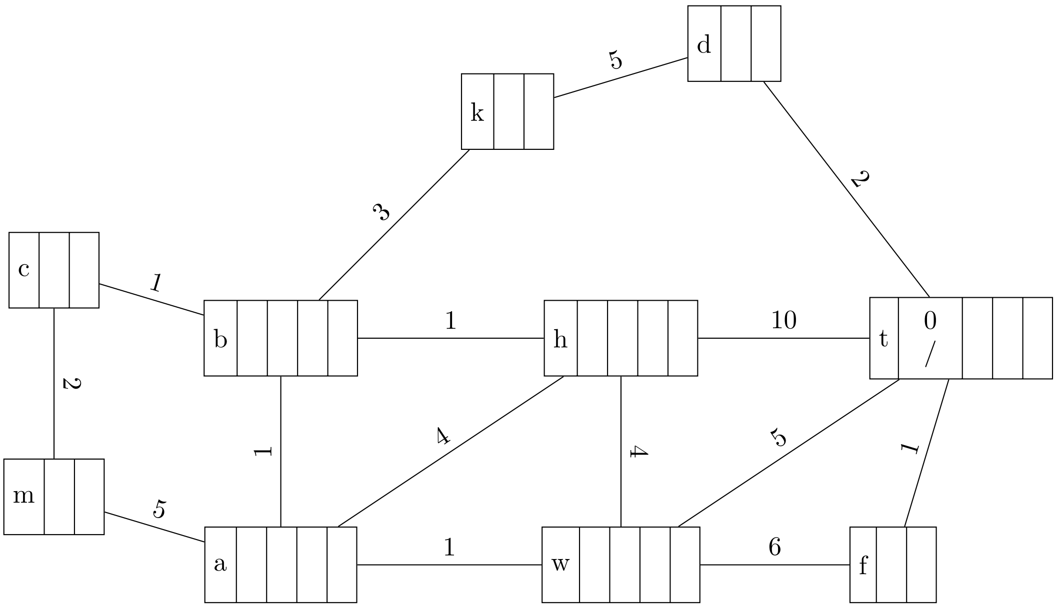
NOM et PRÉNOM :

Exercice 9 (2 points) –
Appliquer l'algorithme de Dijkstra **en partant de** t sur le graphe ci-dessous.

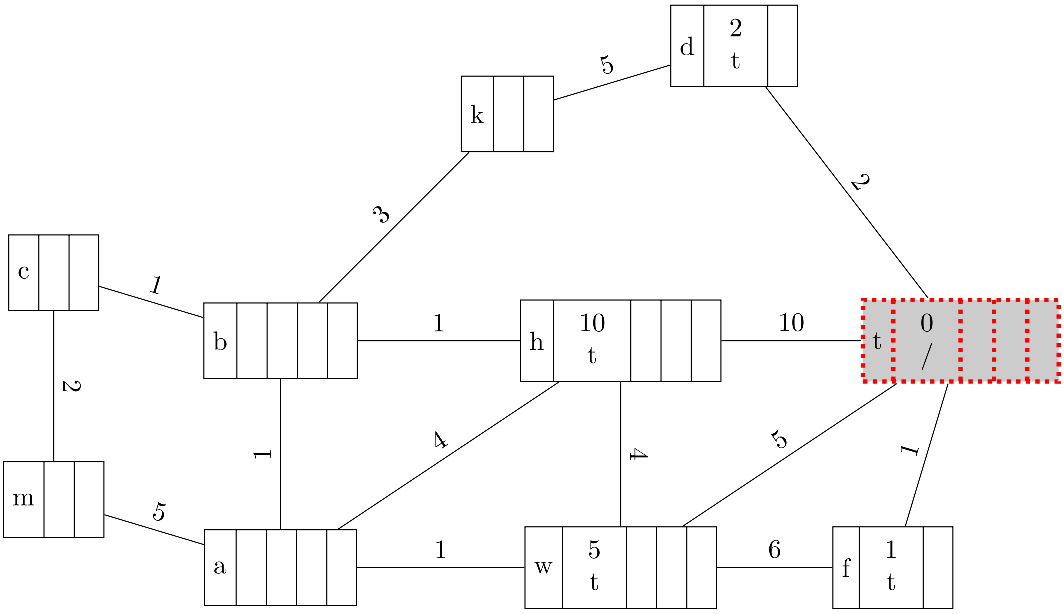


Résolution.

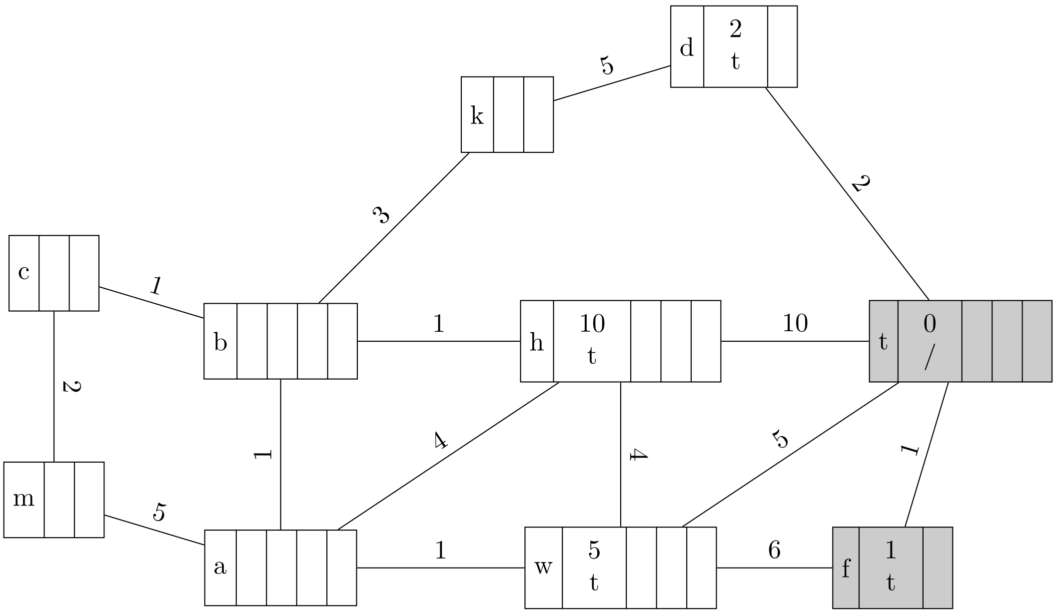
- t est le point de départ :



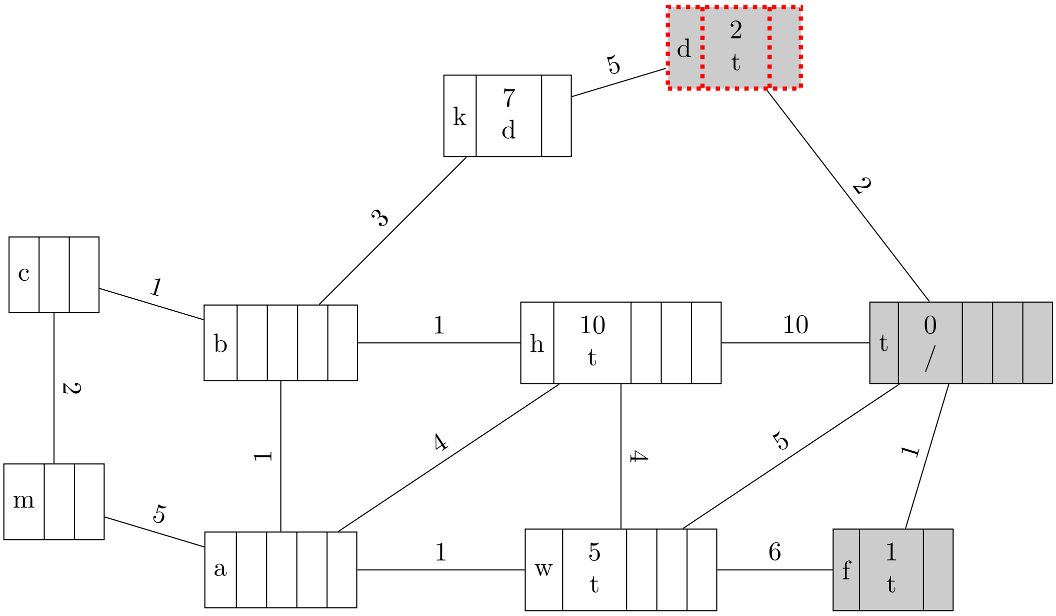
- On marque les voisins de t :



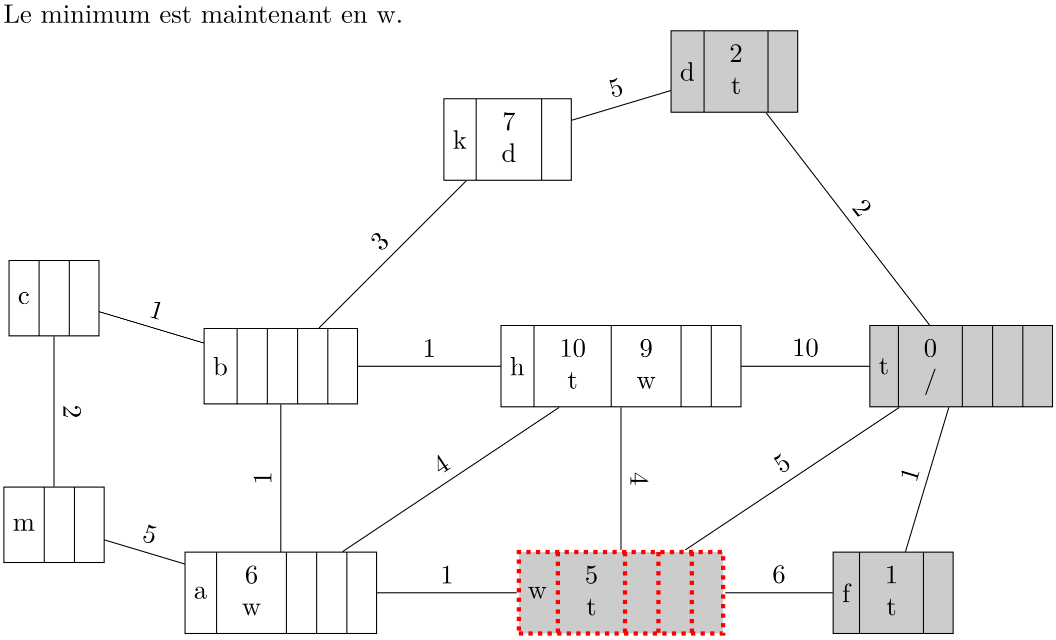
- La marque minimale parmi les non grisés est f. Mais aucun de ses voisins n'est à mettre à jour.



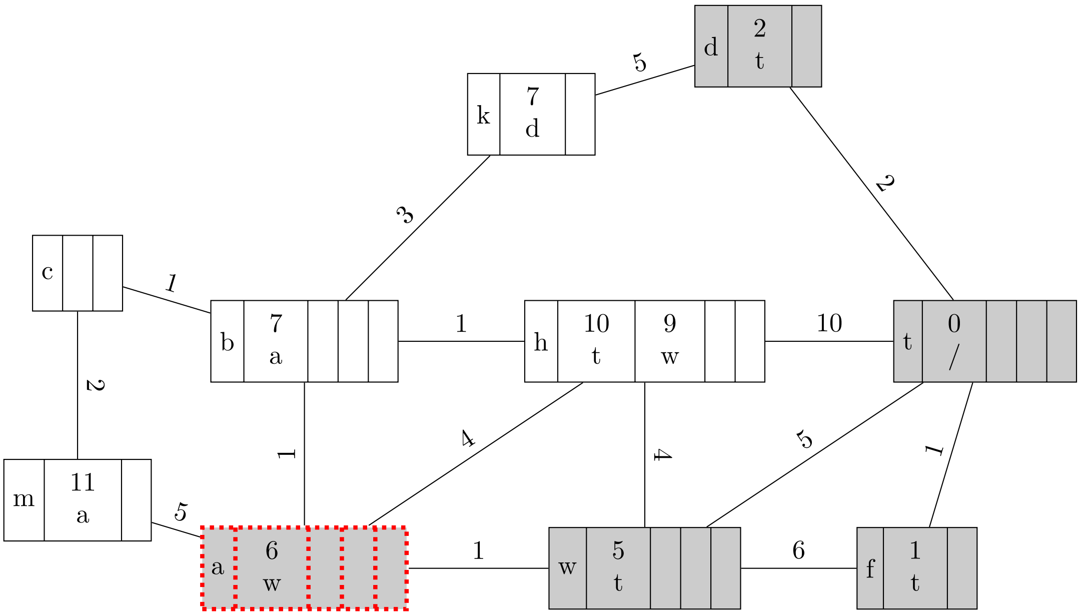
- La marque minimale parmi les non grisés est maintenant en d.



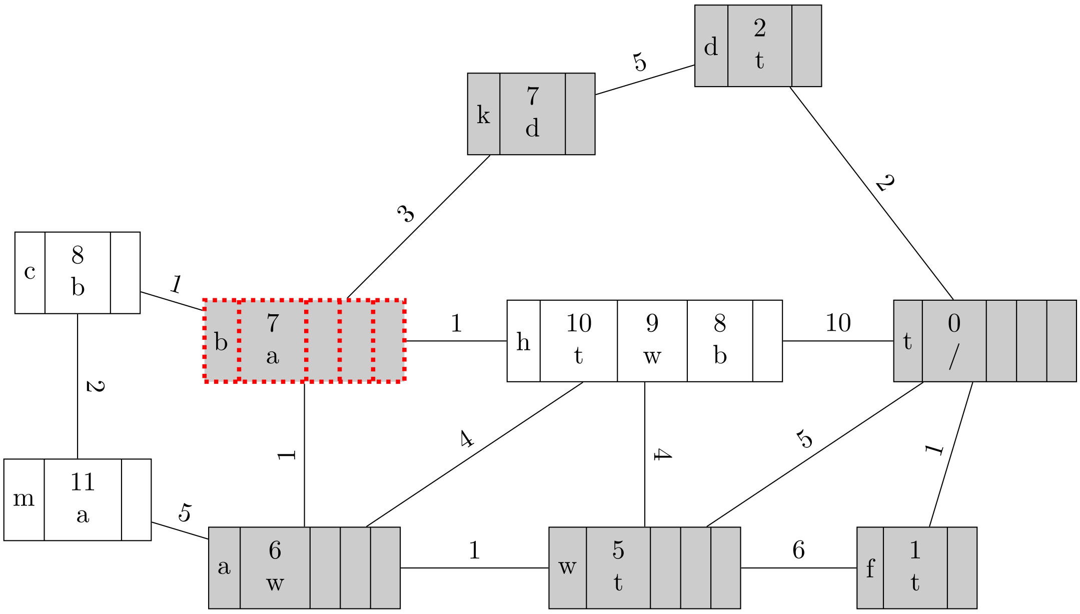
- Le minimum est maintenant en w.



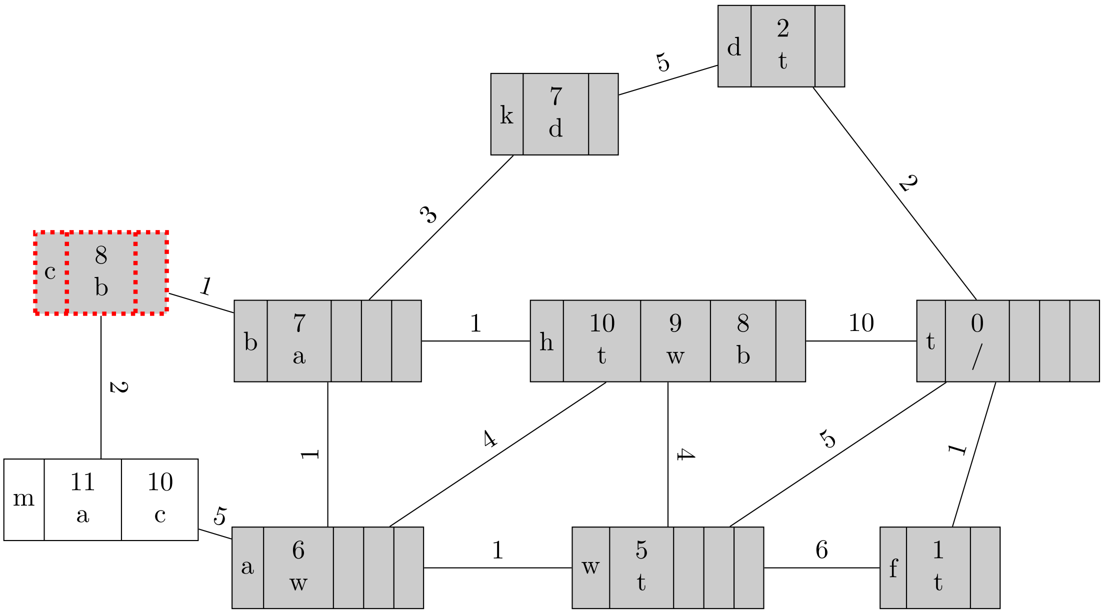
- Le minimum est maintenant en a.



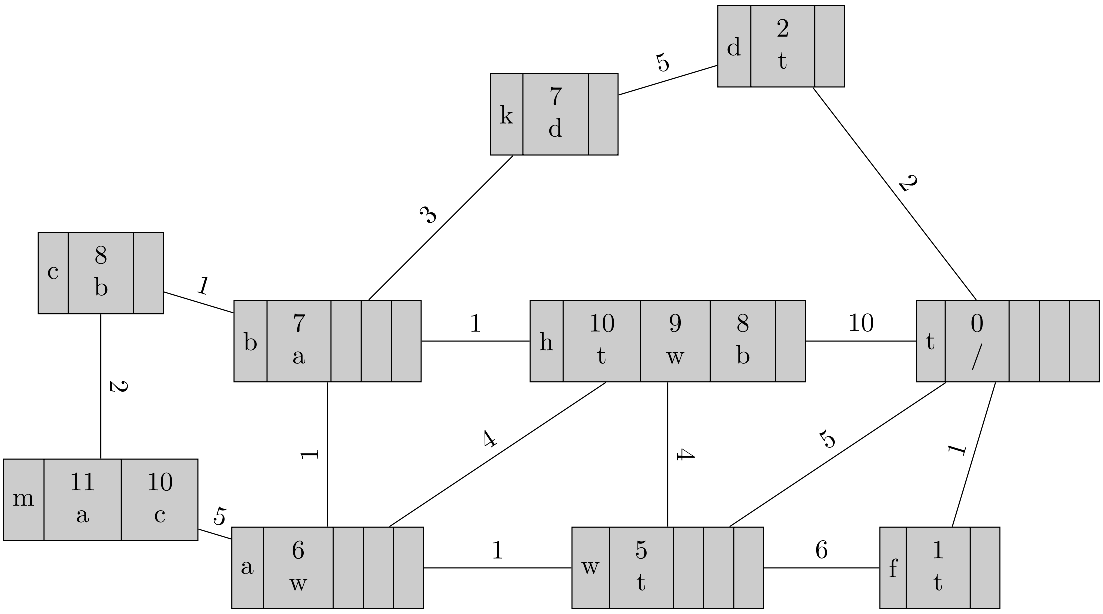
- Les minima sont maintenant en b et k. Prenons par exemple k comme étape suivante : ses voisins sont inchangés. Puis nous prenons b :



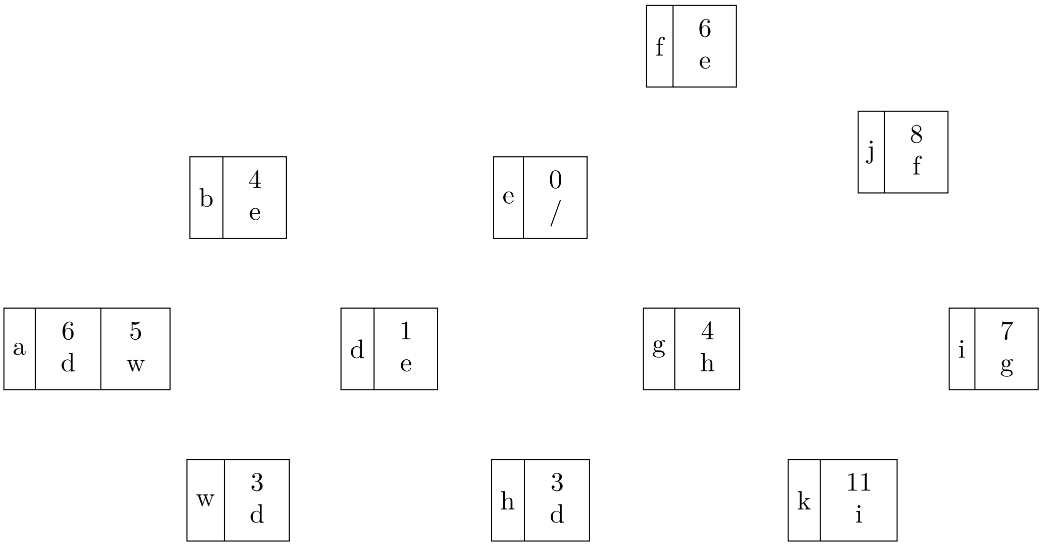
- Prenons h ensuite qui présente un minimum. Ses voisins sont inchangés. Puis c est le nouveau point d'étape :



- Et nous terminons avec m :



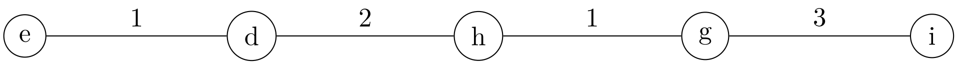
Exercice 10 (2 points) –
On a appliqué l'algorithme de Dijkstra sur un graphe. Les étapes du déroulement de l'algorithme sont inscrites ci-dessous mais les arêtes reliant les sommets ont été effacées, ainsi que les distances associées.



1. Quel est le sommet de départ ?
2. Donner un plus court chemin de ce point de départ à la ville i et donner la longueur de ce chemin.

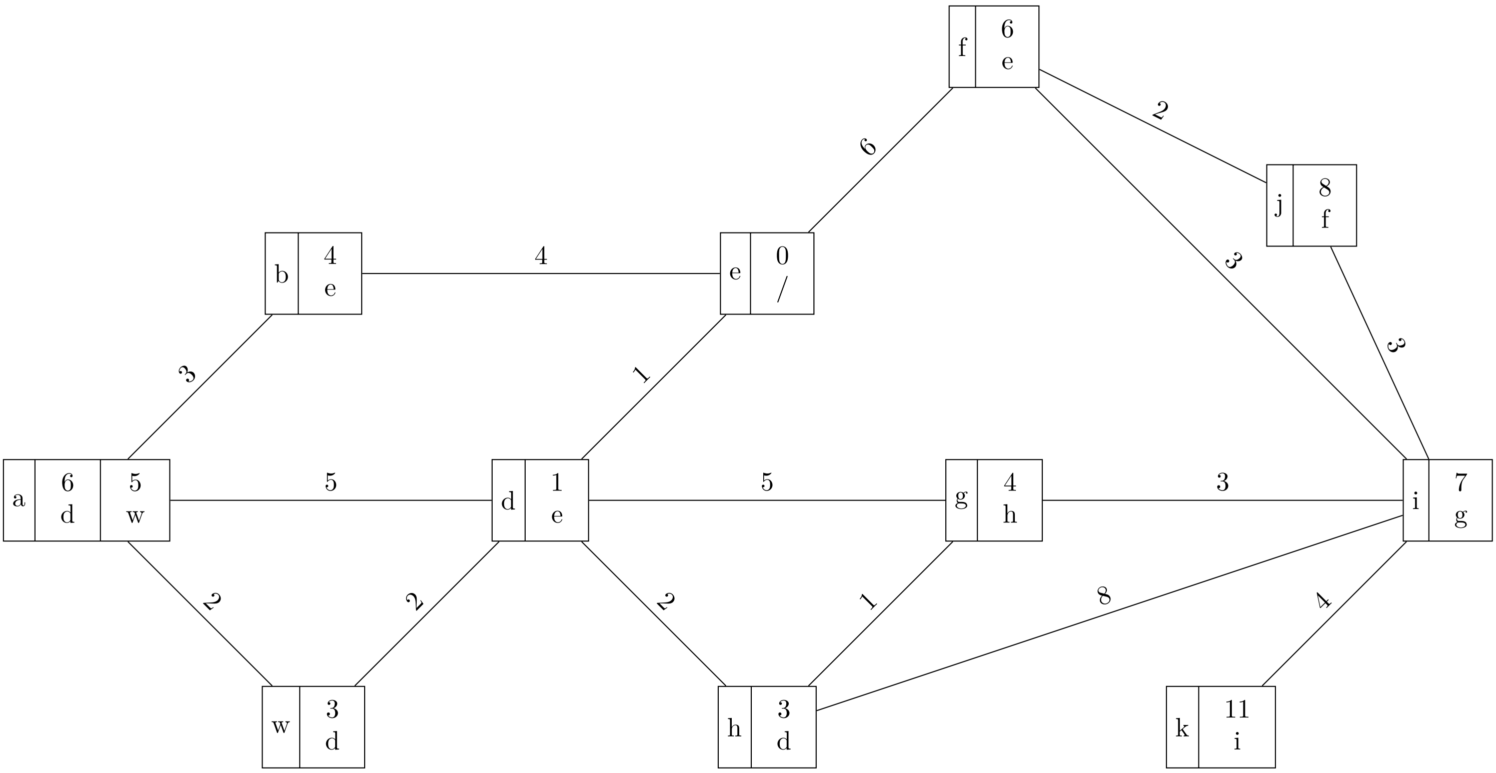
Résolution.

1. Le point de départ est le sommet e (puisqu'il porte la marque 0).
2. Le chemin de e à i est edhgi. La longueur de ce chemin est 7.

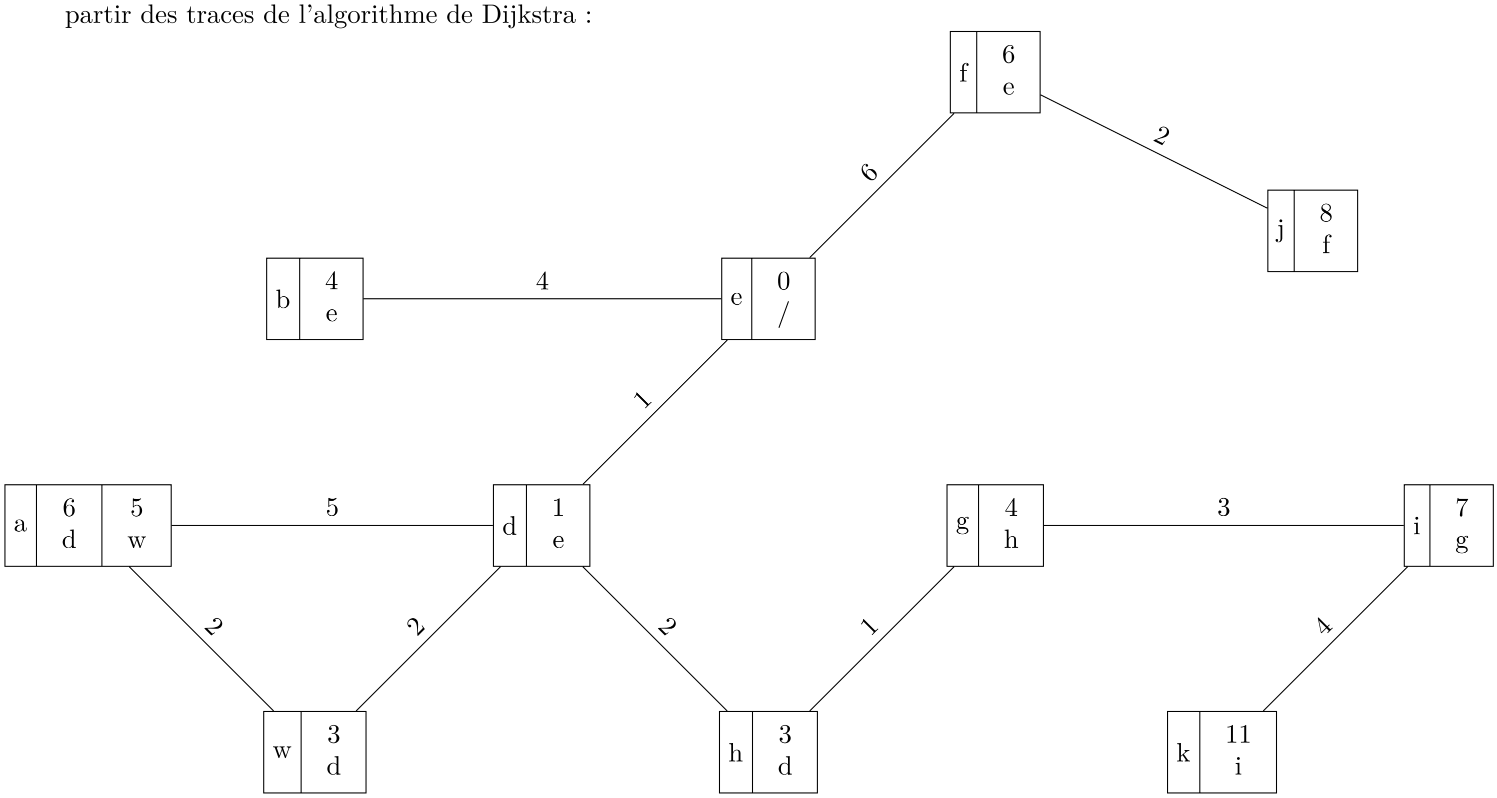


Exercice 11 (points bonus, hors barème) –
Sur le graphe de l'exercice précédent, les traces de déroulement de l'algorithme de Dijkstra permettent de reconstituer quelques arêtes du graphe. Essayez de reconstituer ces arêtes avec leurs poids.

Résolution.
Le point de départ était le suivant :



mais on ne pouvait pas tout reconstituer. Ci-dessous, le graphe avec les arêtes qu'il était possible de reconstituer à partir des traces de l'algorithme de Dijkstra :



Exercice 12 (points bonus, hors barème) –
On reprend la matrice d'adjacence du réseau Tiktok décrite à l'exercice 7. Donner la taille de cette matrice en To.

Résolution.
Le nombre de sommets est 1 milliard, soit 10^9. Le nombre de bits utilisé pour la matrice d'adjacence est donc de $10^9 \times 10^9 = 10^{18}$.
Le nombre d'octets est donc le huitième de cette valeur, soit $\frac{10^{18}}{8} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10^{15}}{2 \times 2 \times 2} = 5 \times 5 \times 5 \times 10^{15}$ octets.
Comme 1 To $= 10^{12}$ octets, on a 125×10^3 To, soit $125\,000$ To.