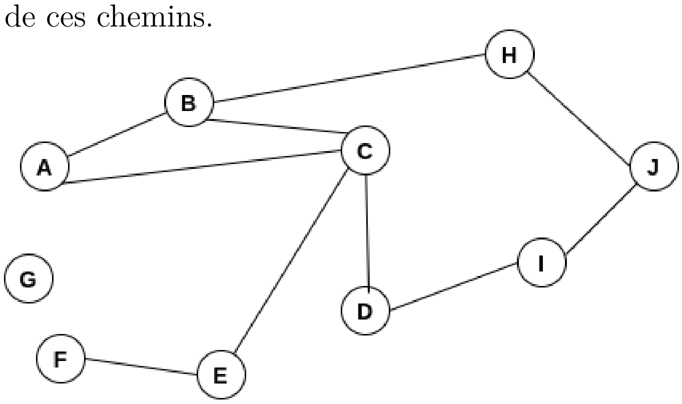
7 Distance entre sommets

7.1 Chemin entre deux sommets

Définition.
Un chemin entre deux sommets X et Y est une séquence de sommets X, S1, S2, S3, ..., Sk, Y tels que X est voisin de S1, S1 est voisin de S2, S2 est voisin de S3, ..., Sk est voisin de Y.
En d'autres termes, on peut penser le graphe comme une carte avec des sentiers (= arêtes) entre des lieux (= sommets). Un chemin entre deux sommets est une succession de lieux et sentiers reliant les deux sommets.

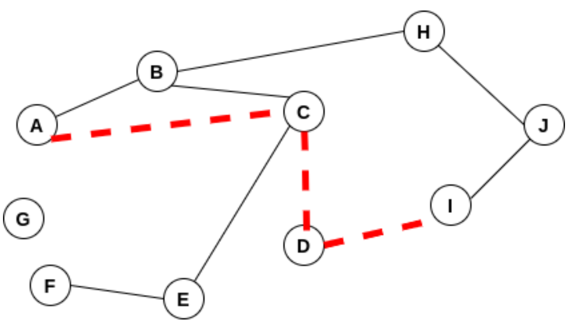
Définition.
La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes composant ce chemin.
En d'autres termes, dans un graphe (sans indication sur les arêtes) on peut considérer que chaque arête représente un sentier de longueur 1. La longueur d'un chemin entre deux sommets est alors la somme des longueurs des sentiers reliant les deux extrémités.

Exercice 1 – Sur le graphe ci-dessous, identifier les chemins de A à I et donner la longueur de chacun de ces chemins.

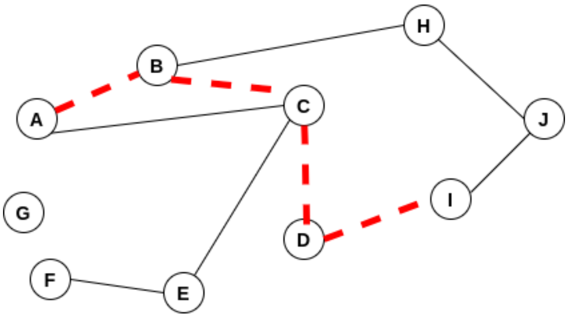


Résolution.

1. Le chemin A-C-D-I (chemin de longueur 3, c'est à dire comportant 3 arêtes)

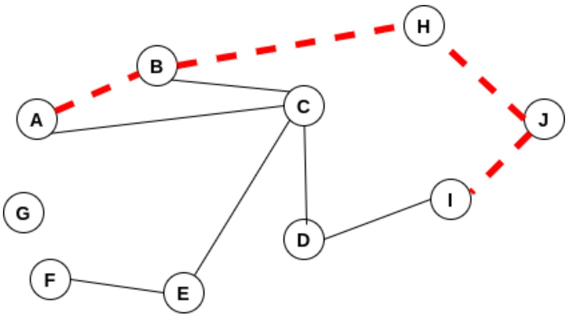


2. Le chemin A-B-C-D-I :

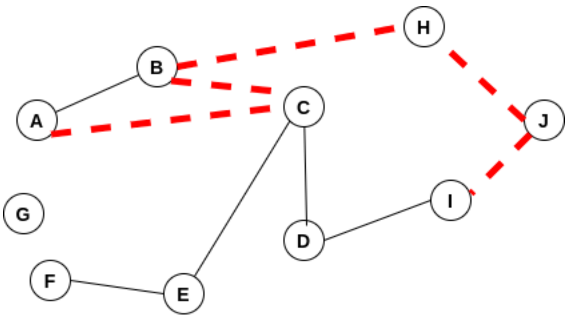


Ce chemin A-B-C-D-I est de longueur 4.

3. Le chemin A-B-H-J-I (de longueur 4) :



4. Le chemin A-C-B-H-J-I (chemin de longueur 5) :



Remarque : on peut aussi définir des chemins dans lesquels on trouve des «circuits fermés » comme le chemin A-B-C-A-B-C-A-B-C-D-I (chemin de longueur 10). Dans la suite, nous éviterons systématiquement ce type de chemins qui utilise plusieurs fois une même arête ou qui passe plusieurs fois par un même sommet, car les chemins d'un sommet à un autre qui nous intéresseront seront les chemins les plus courts entre ces deux sommets. □

7.2 Distance entre deux sommets

Définition.
La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets.

Exercice 2 – Dans le graphe de l'exercice 1 :

1. Quelle est la distance entre les sommets A et I ?
2. Quelle est la distance entre les sommets F et H ?
3. Quelle distance pourrait-on définir entre les sommets A et G ?

Résolution.

1. Nous avons déjà énuméré les chemins de A à I. Le plus court des chemins trouvés est de longueur 3. La distance entre A et I est donc égale à 3 (notation : dist(A,I) = 3), et cette distance est obtenue avec le chemin A-C-D-I.
2. De F à H, on identifie les divers chemins : F-E-C-B-H (longueur 4), F-E-C-D-I-J-H (longueur 6), F-E-C-A-B-H (longueur 5). Le plus court chemin est de longueur 4. La distance de F à H est donc égale à 4 (dist(F,H) = 4) et cette distance est obtenue par le chemin F-E-C-B-H.
3. Il n'est pas possible d'aller de A en G puisqu'aucune arête ne relie G. Dans ce cas, on parlera de distance infinie entre A et G. On note : dist(A, G)= ∞. □

7.3 Le petit monde de Milgram

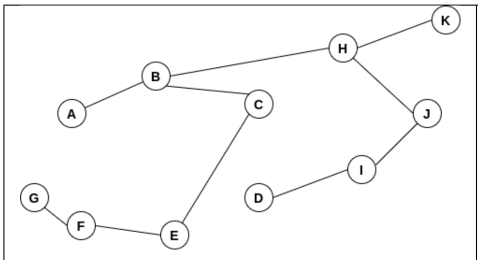
Stanley Milgram (1933-1984) est un psychologue social américain.
Le principe du « petit monde de Milgram » est l'idée que, dans un réseau social, la distance entre deux sommets est toujours assez faible.
Plusieurs expériences tendent à montrer qu'entre deux individus quelconques la distance la plus fréquemment observée est de l'ordre de 5 ou 6.
Il ne faut donc pas se laisser impressionner par quelqu'un affirmant qu'il connaît ou qu'il est en relation avec des personnes proches d'une célébrité... les résultats cités ci-dessus montrent que c'est plutôt fréquent !

7.4 Diamètre d'un graphe

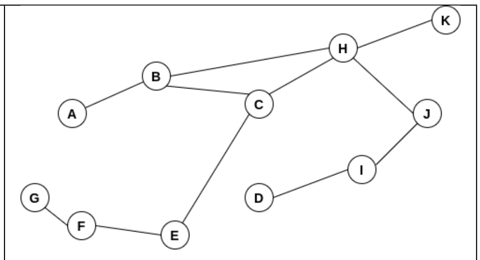
Définition.
Le diamètre d'un graphe est la plus grande des distances entre deux sommets de ce graphe.

Dans un réseau social, le diamètre du graphe donne donc le plus grand nombre d'intermédaires possibles entre deux personnes. Le principe du "petit monde de Milgram" tend à prouver que ce nombre est plutôt faible dans un réseau social.

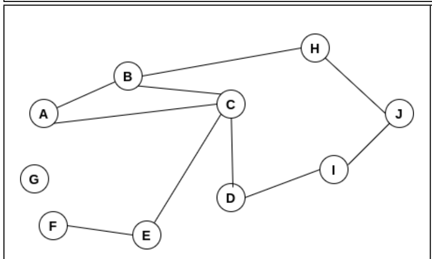
Exercice 3 – Pour chacun des graphes ci-dessous, pour tous les couples de sommets, donner la distance entre les éléments de ce couple. En déduire le diamètre du graphe dans chaque cas.



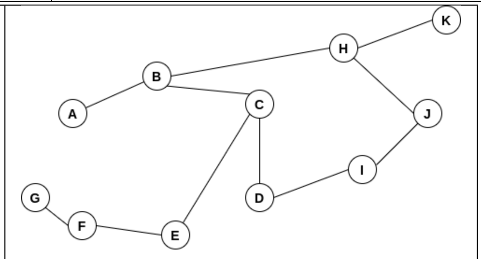
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4

Résolution.

Graphe 1 – On remplit le tableau des distances (on ne remplit que le triangle supérieur, le triangle inférieur étant le même par symétrie par rapport à la diagonale «ligne = colonne»)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	0	1	2	5	3	4	5	2	4	3	3
B		0	1	4	2	3	4	1	3	2	2
C			0	5	1	2	3	2	4	3	3
D				0	6	7	$\boxed{8}$	3	1	2	4
E					0	1	2	3	5	4	4
F						0	1	4	6	5	5
G							0	5	7	6	6
H								0	2	1	1
I									0	1	3
J										0	2
K											0

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 8. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet D au sommet G.

Graphe 2 – Le graphe est très proche du précédent. Mais une arête a été ajoutée entre les sommets C et H : cela raccourcit un certain nombre de distances.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	0	1	2	5	3	4	5	2	4	3	3
B		0	1	4	2	3	4	1	3	2	2
C			0	4	1	2	3	1	3	2	2
D				0	5	6	$\boxed{7}$	3	1	2	4
E					0	1	2	2	4	3	3
F						0	1	3	5	4	4
G							0	4	6	5	5
H								0	2	1	1
I									0	1	3
J										0	2
K											0

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 7. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet D au sommet G.

Graphe 3 – Le sommet G n'est pas atteignable depuis les autres sommets. Le tableau des distances fera donc nécessairement apparaître des distances infinies. Le diamètre de ce graphe est donc ∞.

Graphe 4 – On a ici encore un graphe très proche du graphe 1 mais avec une arête ajoutée entre les sommets C et D. Le tableau des distances :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	0	1	2	3	3	4	5	2	4	3	3
B		0	1	2	2	3	4	1	3	2	2
C			0	1	1	2	3	2	2	3	3
D				0	2	3	4	3	1	2	4
E					0	1	2	3	3	4	4
F						0	1	4	4	5	5
G							0	5	5	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$
H								0	2	1	1
I									0	1	3
J										0	2
K											0

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 6. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet G au sommet J, mais aussi comme distance de G à K.

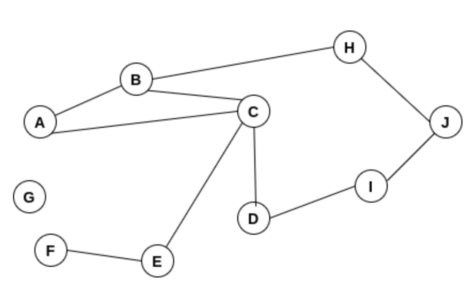
8 Excentricité

8.1 Ecartement

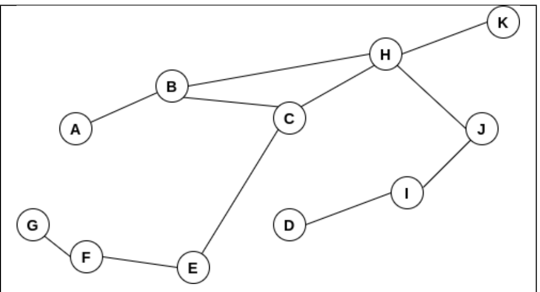
Définition.
Soit X un sommet d'un graphe. On considère toutes les distances dist(X,S) de X à un quelconque autre sommet du graphe. La plus grande de ces distances est nommée excentricité (ou écartement) du sommet X.
Pour déterminer l'excentricité de X, on cherche donc à déterminer un sommet Z le plus éloigné de X. La distance de X à Z est l'excentricité de X.

Les expériences confirmant « le petit monde de Milgram » semblent donc établir que, dans le graphe associé à un réseau social, les excentricités des sommets sont assez petites.

Exercice 4 – Pour les deux graphes ci-dessous



Graphe 1



Graphe 2

donner l'excentricité de chacun des sommets A, F, C, G.

Résolution.

Graphe 1– On dresse le tableau (d'une seule ligne) des distances du sommet considéré aux autres sommets.

(a) Sommet A.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	0	1	1	2	2	3	∞	2	3	3

La distance de A à un autre sommet la plus grande est la distance de A à G. L'excentricité de A est donc donnée par cette distance dist(A, G). L'excentricité (ou écartement) de A est ∞.

(b) Sommet F.
Comme dist(F,G) $=\infty$, on aura de même une excentricité égale à ∞ pour le sommet F.

(c) Même remarque pour le sommet C : excentricité(C) $=\infty$.

(d) De façon analogue, excentricité(G) $=\infty$.

Graphe 2– Pour le second graphe, il n'y a pas de sommet isolé, on n'aura donc pas d'excentricité infinie. On dresse les tableaux des distances pour chacun des sommets demandés.

(a) Sommet A.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	0	1	2	$\boxed{5}$	3	4	$\boxed{5}$	2	4	3	3

D'après ce tableau, l'excentricité de A est égale à 5. Elle est réalisée par la distance de A à D et par la distance de A à G.

(b) Sommet F.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
F	4	3	2	$\boxed{6}$	1	0	1	3	5	4	4

D'après ce tableau, l'excentricité de F est égale à 6. Elle est réalisée par la distance de F à D.

(c) Sommet C.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
C	2	1	0	$\boxed{3}$	1	2	$\boxed{3}$	1	$\boxed{3}$	2	2

D'après ce tableau, l'excentricité de C est égale à 3. Elle est réalisée par exemple par la distance de C à D.

(d) Sommet G.

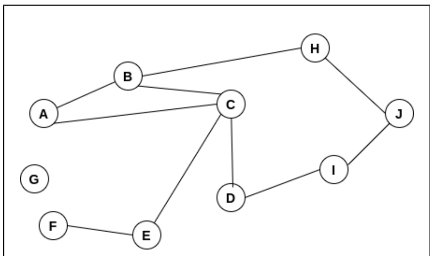
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
G	5	4	3	$\boxed{7}$	2	1	0	4	6	5	5

D'après ce tableau, l'excentricité de G est égale à 7. Elle est réalisée par la distance de G à D.

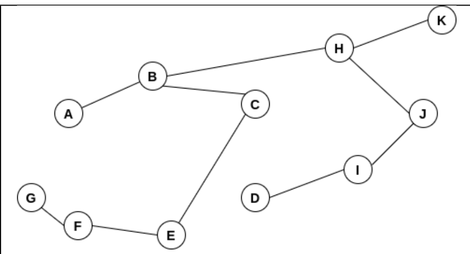
8.2 Centre et rayon

Définition.
On appelle **centre** d'un graphe tout sommet ayant une excentricité minimale.
On appelle **rayon** d'un graphe l'excentricité minimale.

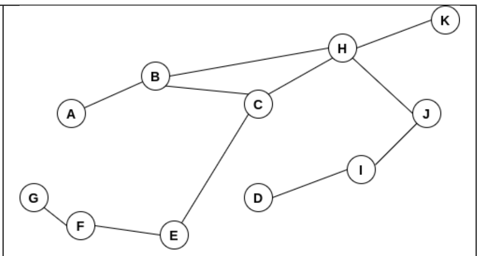
Exercice 5 – 1. Pour chacun des graphes ci-dessous, déterminer le rayon et les centres du graphe



Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3

2. Supposons que les graphes précédents représentent des cartes routières, toutes les routes de longueur 1. On doit placer un centre de secours et un seul. Où le place-t-on ?
3. Supposons que les graphes précédents soient des graphes représentant des liens d'« amitié » sur un réseau social. Que dire d'un abonné de ce réseau qui est centre du graphe ? Citer des situations sur des réseaux où une personne aurait intérêt à être centre du graphe.

Résolution.

1. Graphe 1.

   On commence par déterminer, selon la même méthode que l'exercice précédent, les excentricités de chaque sommet.

   On obtient :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Excentricités	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

   Le rayon est l'excentricité minimale. Les excentricités étant toutes ∞, le rayon est ∞. Chaque sommet est un centre.

2. Les deux autres graphes sont connexes (ce qui signifie que l'on peut rejoindre tout sommet à partir de n'importe quel sommet). La notion de rayon et de centre est évidemment plus consistante dans ce cas de figure.

   (a) Graphe 2.

   Le tableau des excentricités est le suivant :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Excentricités	5	4	5	8	6	7	8	5	7	6	6

   L'excentricité minimale est égale à 4 (excentricité de B). Le sommet B est donc un centre du graphe.

   (b) Graphe 3.

   Pour déterminer les excentricités, on a d'abord besoin de déterminer les distances d'un sommet à un autre. On donne toutes les distances de sommet à sommet dans la matrice des distances ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	0	1	2	5	3	4	5	2	4	3	3
B	1	0	1	4	2	3	4	1	3	2	2
C	2	1	0	4	1	2	3	1	3	2	2
D	5	4	4	0	5	6	7	3	1	2	4
E	3	2	1	5	0	1	2	2	4	3	3
F	4	3	2	6	1	0	1	3	5	4	4
G	5	4	3	7	2	1	0	4	6	5	5
H	2	1	1	3	2	3	4	0	2	1	1
I	4	3	3	1	4	5	6	2	0	1	3
J	3	2	2	2	3	4	5	1	1	0	2
K	3	2	2	4	3	4	5	1	3	2	0

   Rappel la distance d'un sommet à un autre est la longueur du **plus court** chemin reliant ces deux sommets.

   Maintenant que nous avons les distances, nous pouvons en déduire les excentricités. L'excentricité d'un sommet est la plus grande **distance** de ce sommet à un autre. On voit donc que l'on peut facilement lire les excentricités ligne par ligne dans la matrice précédente : l'excentricité de A est la plus grande valeur lue dans la ligne des distances correspondant à A.

   On peut compléter la matrice par une colonne des excentricités :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	Excentricités
A	0	1	2	5	3	4	5	2	4	3	3	excentricité(A) = 5
B	1	0	1	4	2	3	4	1	3	2	2	excentricité(B) = 4
C	2	1	0	4	1	2	3	1	3	2	2	excentricité(C) = 4
D	5	4	4	0	5	6	7	3	1	2	4	excentricité(D) = 7
E	3	2	1	5	0	1	2	2	4	3	3	excentricité(E) = 5
F	4	3	2	6	1	0	1	3	5	4	4	excentricité(F) = 6
G	5	4	3	7	2	1	0	4	6	5	5	excentricité(G) = 7
H	2	1	1	3	2	3	4	0	2	1	1	excentricité(H) = 4
I	4	3	3	1	4	5	6	2	0	1	3	excentricité(I) = 6
J	3	2	2	2	3	4	5	1	1	0	2	excentricité(J) = 5
K	3	2	2	4	3	4	5	1	3	2	0	excentricité(K) = 5

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Excentricités	5	4	4	7	5	6	7	4	6	5	5

L'excentricité minimale est égale à 4 (excentricité de B, de C, de H). Les sommets B, C et H sont des centres du graphe.

3. En plaçant le centre de secours sur un centre du graphe, on le place en un sommet qui permet d'atteindre tous les sommets assez rapidement. En plaçant les secours en dehors d'un centre du graphe, on aurait au moins une distance plus longue entre cet emplacement et un sommet que les distances à réaliser depuis un centre du graphe.
4. En terme de réseau social, le centre est celui qui a le moins d'intermédiaires pour contacter tout le monde. Propriété évidemment intéressante pour un influenceur, pour une entreprise utilisant le réseau pour sa publicité, …

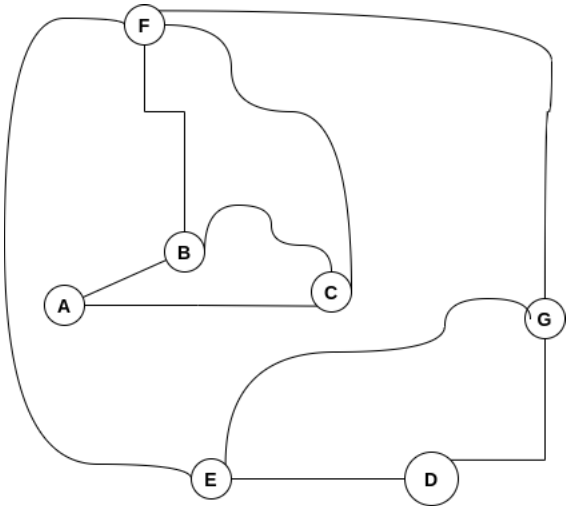
Exercice 6 – Dans un réseau social, les liens (non orientés) entre les personnes A, B, C, D, E, F, G sont donnés par le tableau d'adjacence ci-dessous (les cases vides sont des 0) :

	A	B	C	D	E	F	G
A		1	1				
B	1		1			1	
C	1	1				1	
D					1		1
E				1		1	1
F		1	1		1		1
G				1	1	1	

Donner une représentation graphique de ce graphe telle que les sommets centre soient centrés dans la représentation graphique (une telle représentation permet de mettre en évidence cette propriété de centre).

Résolution.

On commence par réaliser une représentation «quelconque» :



On dresse la matrice des distances (pour tout couple de sommets (X,Y), on indique la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets) :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	0	1	1	4	3	2	3
B	1	0	1	3	2	1	2
C	1	1	0	3	2	1	2
D	4	3	3	0	1	2	1
E	3	2	2	1	0	1	1
F	2	1	1	2	1	0	1
G	3	2	2	1	1	1	0

On en déduit le tableau des excentricités (en prenant le maximum dans chaque colonne de la matrice des distances) :

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Excentricités	4	3	3	4	3	2	3

On en déduit le rayon (en prenant la valeur minimale du tableau des excentricités). Le rayon est 2 et F est un centre.

On dessine alors le graphe en plaçant le centre «géométriquement » au centre... :