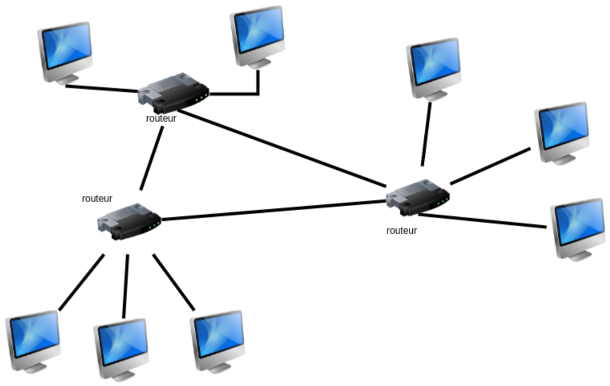
# Les graphes

## 1 Introduction

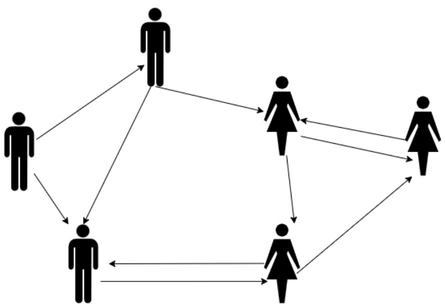
La notion de graphe est une notion essentielle en informatique.
Elle permet de modéliser de nombreuses situations informatiques, dont nous verrons les plus élémentaires.

### 1.1 Exemple 1 : un réseau d'ordinateurs



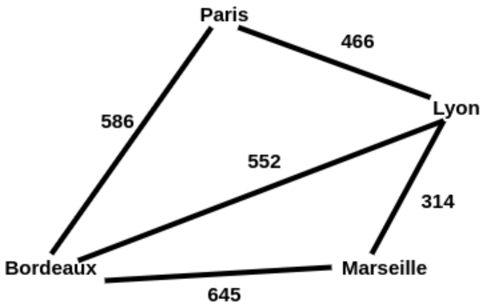

1. Les noeuds du réseau sont des appareils électroniques (ordinateurs personnels, routeurs, serveurs...) ou des logiciels.
2. Un segment entre deux machines signifient ici qu'elles peuvent communiquer entre elles, elles peuvent être pour cela reliées par des fils (de diverses natures : câble ethernet, fibre, etc...) ou même sans fil (par exemple dans un réseau wifi).

### 1.2 Exemple 2 : un réseau social



1. Les noeuds du réseau (ou **sommets du graphe**) sont des personnes, des abonnés au réseau.
2. Entre deux sommets, on a ici représenté des flèches plutôt que des segments pour traduire le fait que les liens dans un réseau ne sont pas toujours symétriques. Par exemple un abonné A peut être abonné aux messages d'un abonné B, sans que B ne soit abonné aux messages de A. Dans d'autres réseaux où les liens sont plus symétriques (dans certains réseaux par exemple, lorsque deux abonnés sont liés, chacun peut envoyer des messages à l'autre), on utilisera des segments sans flèche pour marquer cette symétrie.

### 1.3 Exemple 3 : un réseau routier




1. Les noeuds du réseau (ou **sommets du graphe**) sont des villes, des lieux.
2. Entre deux sommets, un segment (ou une courbe plus complexe si l'on veut respecter la géographie réelle) représente la présence d'une route. Ces segments (ou **arêtes** du graphe) peuvent être **pondérés**, c'est à dire marqués d'une valeur. Cette valeur peut représenter une distance (en kilomètres par exemple) ou un temps (en heures, correspondant au temps de parcours moyen des utilisateurs de cette section de route).

### 1.4 Exemple 4 : le web

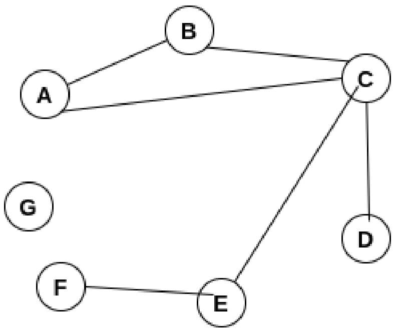
L'ensemble des pages sur le web constitue un gigantesque graphe : chaque page est un sommet de ce graphe, et un lien hypertexte entre deux pages correspond à une arête du graphe. Cette façon de voir le web comme un graphe est exploité par de nombreux logiciels (les moteurs de recherche par exemple).

## 2 Vocabulaire

Les exemples précédents modélisent des situations très différentes mais les représentations montrent beaucoup de points communs : la notion de **graphe** est définie à partir de ces points communs.

### 2.1 Graphe (non orienté)

Un **graphe** (non orienté) est constitué de **sommets** (que l'on représente par des points ou des cercles, des disques, des rectangles...) et d'arêtes (liaisons entre les sommets, représentés par des segments ou des courbes reliant deux représentations de sommets).




Sur le graphe représenté :

- Les sommets sont nommés A, B, C, D, E, F, G.
- Une arête relie le sommet A au sommet B, une arête relie le sommet A au sommet C, etc...
- Le sommet A est dit de **degré** 2 car deux arêtes sont issues de A.
- B et C sont les sommets **voisins** de A (car ils sont reliés à A). On dit aussi que deux sommets reliés par une arête sont deux sommets **adjacents**.
- Le sommet G est dit **isolé** car il n'est relié à aucun autre.

**Définition.**

- Le nombre de sommets d'un graphe est appelé **ordre** du graphe.
- Le nombre d'arêtes d'un graphe est appelé **taille** du graphe.

**Exercice 1 –** Sur le graphe précédent : a) Donner un couple de sommets adjacents. b) Quels sont les voisins du sommet C ? c) Quel est le degré du sommet C ? d) Quel est le degré du sommet G ? e) Quel est la taille du graphe ? f) Quel est l'ordre du graphe ?

**Exercice 2 –** Dans un réseau social encore en expérimentation, il y a six membres : Amin, Ben, Carla, Denis, Elsa, Flo. On donne les relations d'amitié (supposées symétriques dans ce réseau) ci-dessous :

- Ben et Amin sont amis.
- Elsa est amie avec Amin, Carla et Flo.
- Denis est ami avec Amin et Carla.
- Carla et Amin sont amis.

1. Représentez ce mini-réseau par un graphe.
2. Quel est l'ordre de ce graphe ?
3. Quelle est la taille de ce graphe ?
4. Quel est le degré du sommet “Amin” ?
5. Le réseau présente-t-il un sommet isolé ?

## 2.2 Graphe orienté

A la place de segments entre deux sommets d'un graphe, on peut dessiner des flèches pour marquer une orientation. Par exemple : dans un réseau d'ordinateurs, dans certains échanges, un ordinateur peut envoyer une requête à un serveur mais le serveur ne peut pas envoyer de requête à l'ordinateur. On utilisera alors une flèche de l'ordinateur vers le serveur pour traduire cette communication à sens unique.

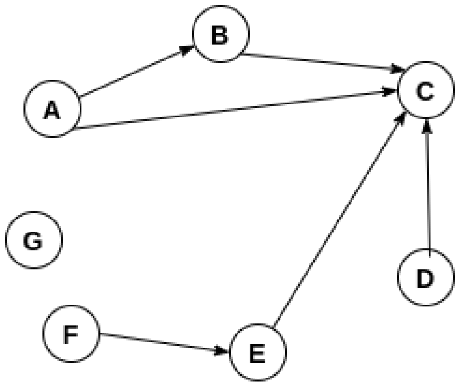
**Exercice 3 –**

1. Dans un réseau routier, citer un exemple d'utilisation d'un tel lien orienté.
2. Dans un réseau social, citer un exemple d'utilisation d'un tel lien orienté. Connaissez-vous un réseau social utilisant ce type de liens ?

**Résolution.**
instagram par exemple : on peut être abonné aux messages d'une personne sans que cette personne ne soit abonnée aux vôtres. De façon assez générale, « suivre » quelqu'un sur un réseau social correspond à un tel lien orienté (unidirectionnel). ☐

**Définition.**
Dans un graphe orienté :

- On parle d'**arcs** au lieu d'arêtes.
- On définit le **degré entrant** d'un sommet : c'est le nombre de flèches qui pointent vers ce sommet.
- On définit le **degré sortant** d'un sommet : c'est le nombre de flèches qui partent de ce sommet.




**Exercice 4 –** Pour le graphe représenté ci-contre :

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Quel est le nombre d'arcs de ce graphe ?
3. Pour chaque sommet, donner son degré entrant.
4. Pour chaque sommet, donner son degré sortant.
5. Vérifier que la somme des degrés entrants est égale à la somme des degrés sortants. Est ce le cas pour tout graphe orienté ?

**Exercice 5 –** Cinq villes A, B, C, D, E sont reliées par des routes qui sont toutes à sens unique.

- Il existe une route de A vers D et une route de A vers C.
- Il existe une route de B vers E.
- Il existe une route de C vers A et une route de C vers B.
- Il existe une route de D vers B.
- Il existe une route de de E vers D.

1. Donner une représentation de la situation par un graphe orienté.
2. Quel est le nombre d'arcs de ce graphe ?
3. Existe-t-il des itinéraires de la ville A vers la ville B ?
4. Existe-t-il des itinéraires de la ville A vers la ville E ?
5. Existe-t-il des itinéraires de la ville E vers la ville A ?

# 3 La matrice d'adjacence

Avec l'exemple de l'exercice 5, on voit que la description de tous les arcs d'un graphe par des phrases peut être vite assez fastidieuse. Pour une personne, une représentation par un dessin de graphe comme ceux réalisés précédemment est déjà plus efficace et lisible. Mais pour une machine, un tel descriptif graphique est difficile à réaliser et à lire. On utilise souvent, pour stocker ce type d'informations en machine, une matrice (ou tableau d'ajacence). Il s'agit d'un simple tableau à double entrée contenant des 1 (un 1 marquant la présence d'un arc pour un graphe orienté ou d'une arête pour un graphe non orienté) et des 0 (un 0 marquant l'absence d'un arc ou d'une arête).

**Exercice 6 –** Pour représenter le graphe de l'exercice 5, on dresse la matrice d'adjacence ci-dessous :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | 1 | 0 |
| B | | | | | |
| C | | | | | |
| D | | | | | |
| E | | | | | |

— On a placé un 1 à l'intersection de la ligne A et de la colonne D car il existe une route de A vers D.

— On a placé un 0 à l'intersection de la ligne A et de la colonne E car il n'existe pas de route de A vers E.

Compléter ce tableau d'adjacence.

La convention utilisée est toujours la même : du « sommet ligne » vers le « sommet colonne ».

**Exercice 7 –** 1. Dresser de même le tableau (ou matrice) d'adjacence du graphe de l'exercice 2.

2. Pouvez-vous donner une particularité du tableau obtenu pour un graphe non orienté par rapport à celui d'un graphe orienté ?

**Exercice 8 –** 1. Donner une représentation du graphe **orienté** dont la matrice d'adjacence est la suivante :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

2. Comment peut-on lire le degré entrant d'un sommet et le degré sortant en utilisant la matrice d'adjacence uniquement ?

**Exercice 9 –** 1. Donner une représentation du graphe (non orienté) dont la matrice d'adjacence est la suivante :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| C | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

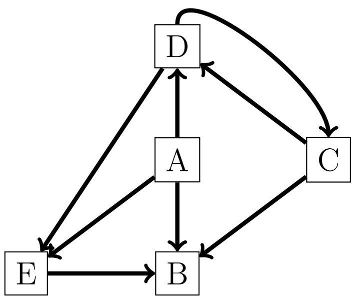
2. Comment peut-on lire le degré d'un sommet en utilisant la matrice d'adjacence uniquement ?

**Exercice 10 –** La matrice d'adjacence d'un graphe orienté est la suivante :

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| E | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

1. Quel est le degré sortant du sommet A ?
2. Quel est le degré entrant du sommet C ?
3. Quel est l'ordre du graphe ?

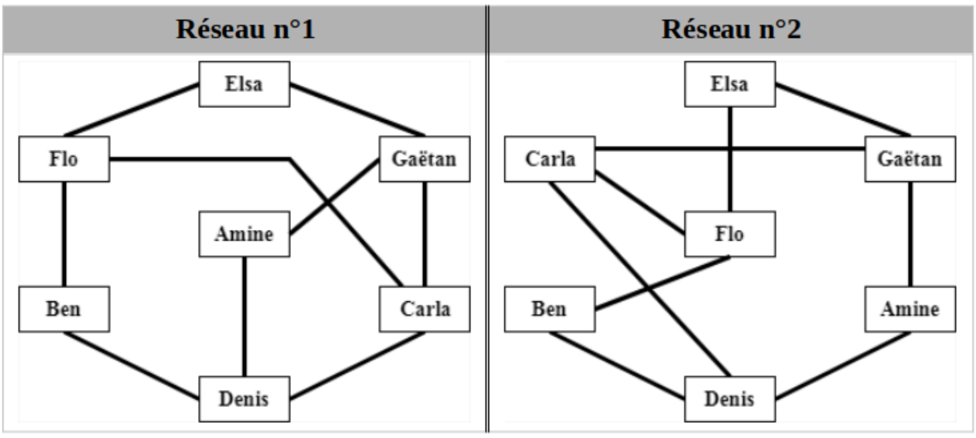
**Résolution.**
Une représentation :




1. Le degré sortant de A est 3.
2. Le degré entrant de C est 1.
3. L'ordre du graphe est 5.

## 4 Graphes égaux mais représentations distinctes

**Exercice 11 –** Voici deux dessins de graphes :



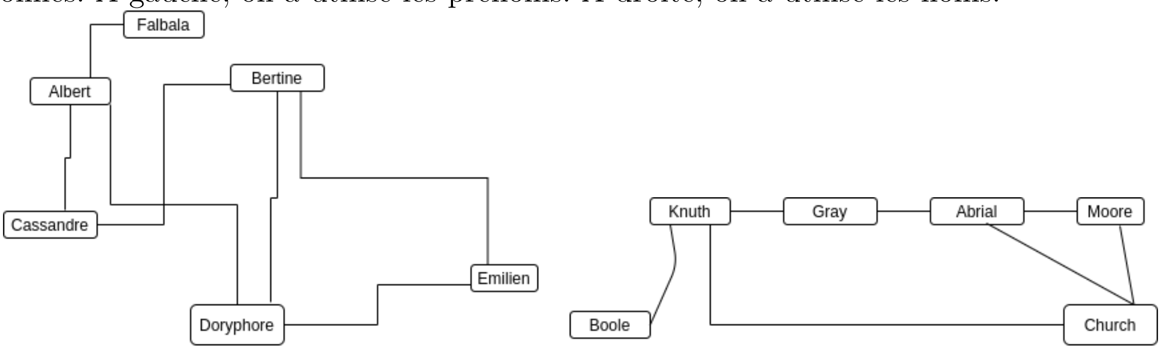

Ces deux dessins représentent-ils le même graphe ? Donner une méthode efficace pour le décider.

**On retiendra :**

- Un graphe peut avoir des représentations à l'apparence visuelle très distinctes.
- Pour savoir si deux représentations sont associées au même graphe, on dresse leurs matrices d'adjacence. Les graphes associés sont identiques si et seulement si les matrices d'adjacence sont égales.

Dans certaines situations, la reconnaissance est encore compliquée par le choix de noms différents. Imaginez par exemple que l'on représente les liens d'amitié entre des personnes en utilisant dans un premier temps les prénoms des personnes puis dans un second temps les noms de famille. Dans ce cas, on ne pourra constater l'égalité des matrices d'adjacence que si on l'a bien dressé la matrice d'adjacence en écrivant les sommets qui se correspondent dans le même ordre pour les deux matrices.

**Exercice 12 –** Les deux graphes ci-dessous représentent les liens d'amitié dans un groupe de personnes. A gauche, on a utilisé les prénoms. A droite, on a utilisé les noms.




1. Dresser les matrices d'adjacence de façon à faire apparaître leur égalité.
2. Donner le nom complet de chaque personne.

# 5 Dans un ordinateur

**A SAVOIR.**

- Dans un ordinateur, la plus petite unité d'information est le **bit**. Un bit vaut 0 ou 1.
- On appelle octet une série de 8 bits.

**A SAVOIR.**

- 1 giga = $10^9$. Par exemple 1 Go = $10^9$ octets.
- 1 tera = $10^{12}$. Par exemple 1 To = $10^{12}$ octets.

**Exercice 13 –** 1. Un graphe présente 3 sommets. On veut coder ce graphe en machine par la matrice d'adjacence en utilisant un bit pour chaque 0 et chaque 1 de la matrice. Combien de bits sont nécessaires pour ce codage ?

2. Au troisième trimestre 2020, Facebook revendique 2,74 milliards d'utilisateurs actifs chaque mois.
   (a) On veut représenter en machine ce réseau par une matrice, comme précédemment. Donner le poids en octets d'une telle matrice.
   (b) Exprimer ce poids en Go (gigaoctet).
   (c) Combien de disques durs de 2 To (teraoctet) faudrait-il utiliser pour stocker une telle information ?

# 6 GPS : trouver le chemin le plus court

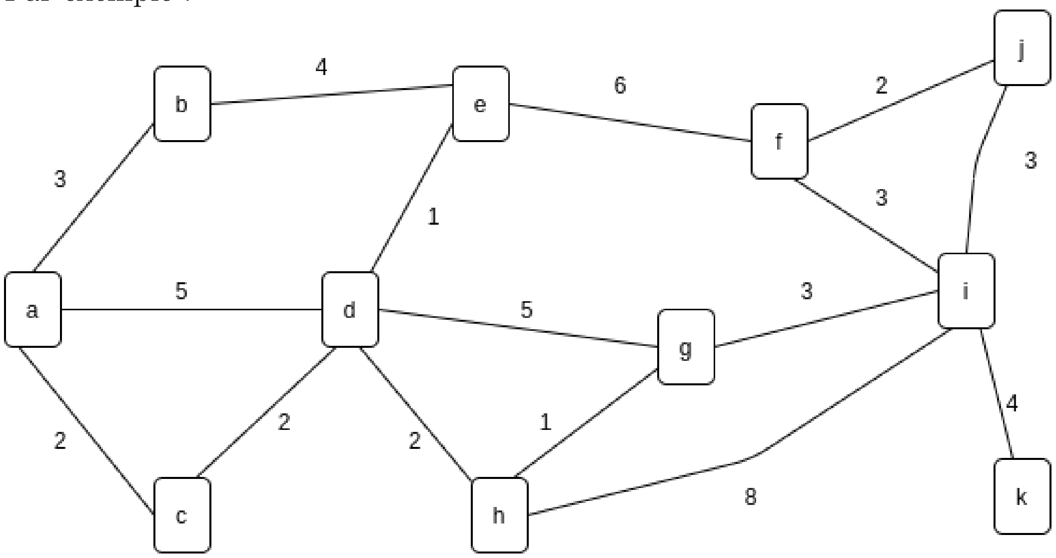
Dans un GPS, vous entrez deux lieux et le GPS détermine très rapidement la distance la plus courte entre ces deux lieux.
Nous allons mettre ici en oeuvre l'un des algorithmes fondamentaux utilisés pour déterminer efficacement un itinéraire le plus court entre deux lieux : l'algorithme de Dijkstra.

Edsger Dijkstra (1930 – 2002) est un mathématicien et informaticien néerlandais. Il reçoit en 1972 le prix Turing pour ses contributions sur la science et l'art des langages de programmation et au langage Algol. Juste avant sa mort, en 2002, il reçoit le prix PoDC de l'article influent, pour ses travaux sur l'autostabilisation. L'année suivant sa mort, le prix sera renommé en son honneur prix Dijkstra.

**Remarque**
On raisonne ici en distance. Mais on peut remplacer cela par des coûts : coût de l'essence + coût des péages. On voit donc que le même algorithme permettra également au GPS de déterminer l'itinéraire le moins cher, il suffit de changer les données constituant les poids sur les arêtes. On peut également remplacer les distances par des temps moyens de parcours et obtenir l'itinéraire qui , en moyenne, demande le moins de temps.

## 6.1 Le problème

On dispose d'un réseau routier entre villes.
Par exemple :




Sur ce réseau, les villes sont nommées a, b, c, ... La valeur indiquée sur la route entre deux villes est la longueur en km de cette route.
On aimerait déterminer l'itinéraire le plus court du point a au point i.

## 6.2 Le principe "force brute"

Une première idée pourrait être de chercher à déterminer **tous** les itinéraires de a à i et de sélectionner le plus court parmi ceux-là.
Comme pour beaucoup de problèmes, cette stratégie se révèle inefficace : le nombre de possibilités augmente très vite avec la taille du réseau routier et le temps de calcul deviendrait vite rédhibitoire (plus long que le temps de déplacement entre les deux villes !)

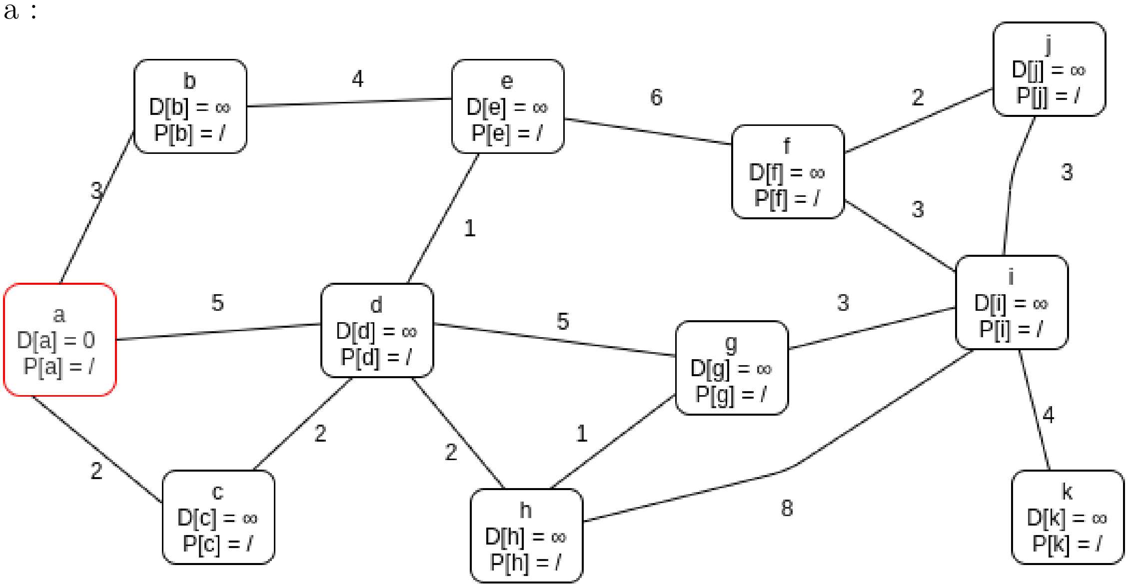
## 6.3 Un principe "glouton"

L'algorithme ci-dessous, appelé algorithme de Dijkstra, permet de calculer un plus court itinéraire d'un point à un autre.
Soit a la ville de départ. On suppose que toutes les villes sont blanches au départ.
On enregistre des distances "provisoires" de la ville de départ à chacun des sommets dans un tableau D.
Lorsqu'on met à jour D[t] pour une ville t, on enregistre également à partir de quelle ville on a pu procéder à cette mise à jour, à l'aide d'un tableau provenance P :

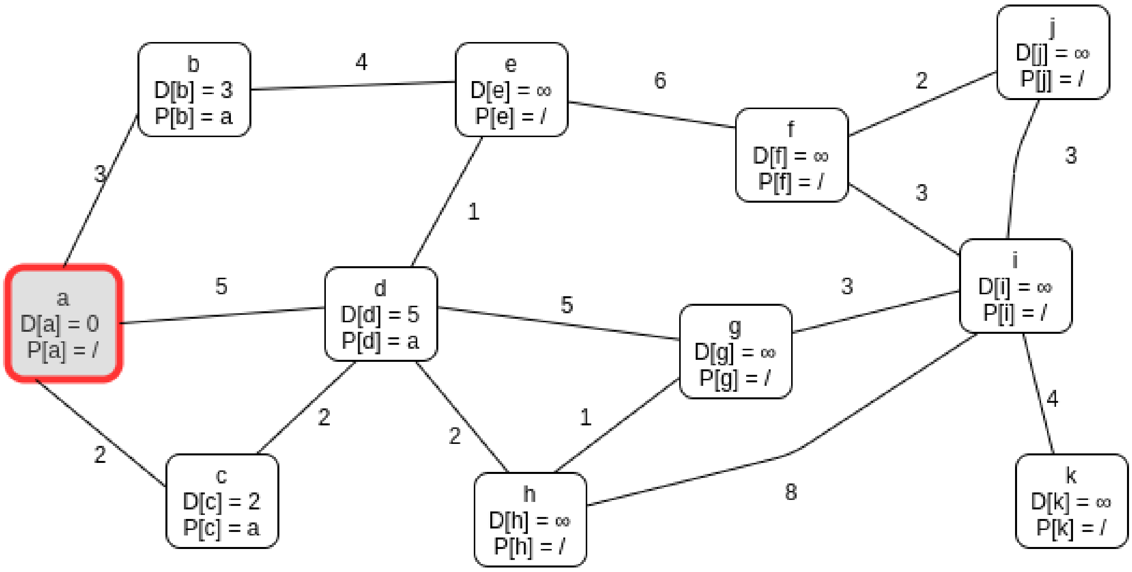
```
D[a] = 0 (distance provisoire de a à a = 0, celle ci est même définitive!)
Pour toute ville s distincte de a:
    D[s] = infini (distance provisoire de a à s infinie)

Tant qu'il reste des villes blanches:
    Choisir une ville blanche v telle que D[v] est minimal parmi les villes blanches
    Griser v
    Pour toute voisine t blanche de v:
        Si D[v] + longueur de la route (v,t) < D[t]:
            D[t] ←  D[v] + longueur de la route (v,t)
            P[t] = v
```

## 6.4 Illustration

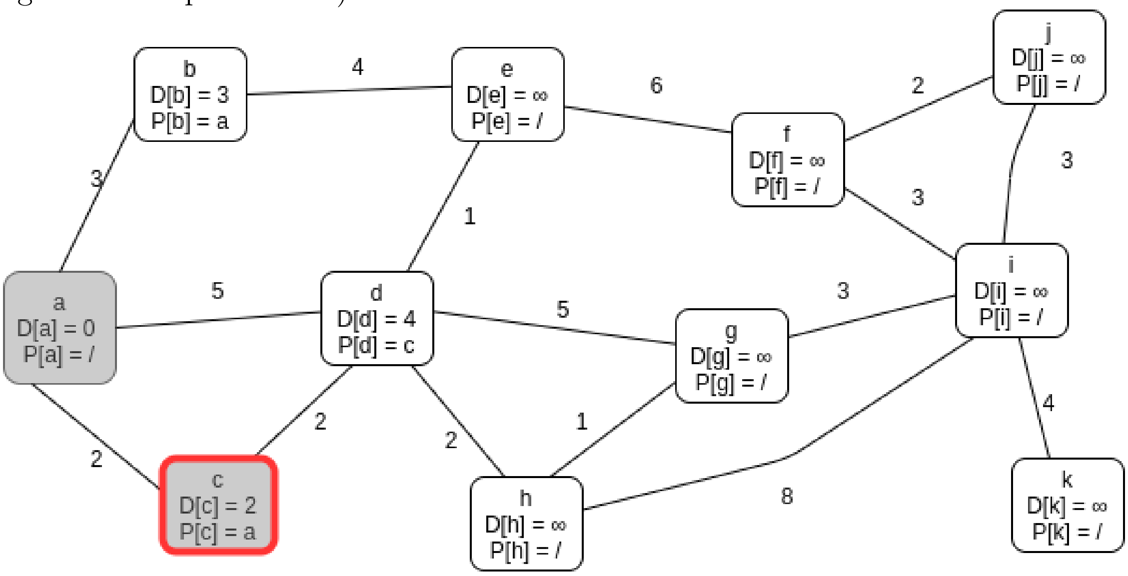
On illustre les étapes de cet algorithme avec le réseau routier représenté ci-dessus. On part de la ville a :



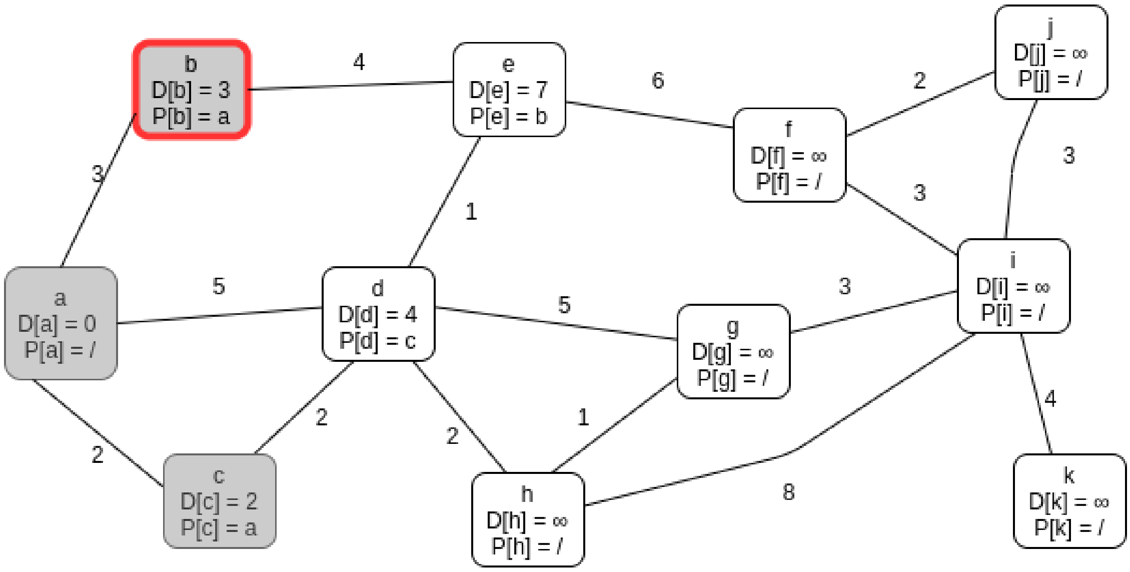

La distance (provisoire) minimale est réalisée par a. On la sélectionne, on la grise et on met à jour les distances provisoires de ses voisines, en indiquant que cette mise à jour s'est faite à partir de la ville a :



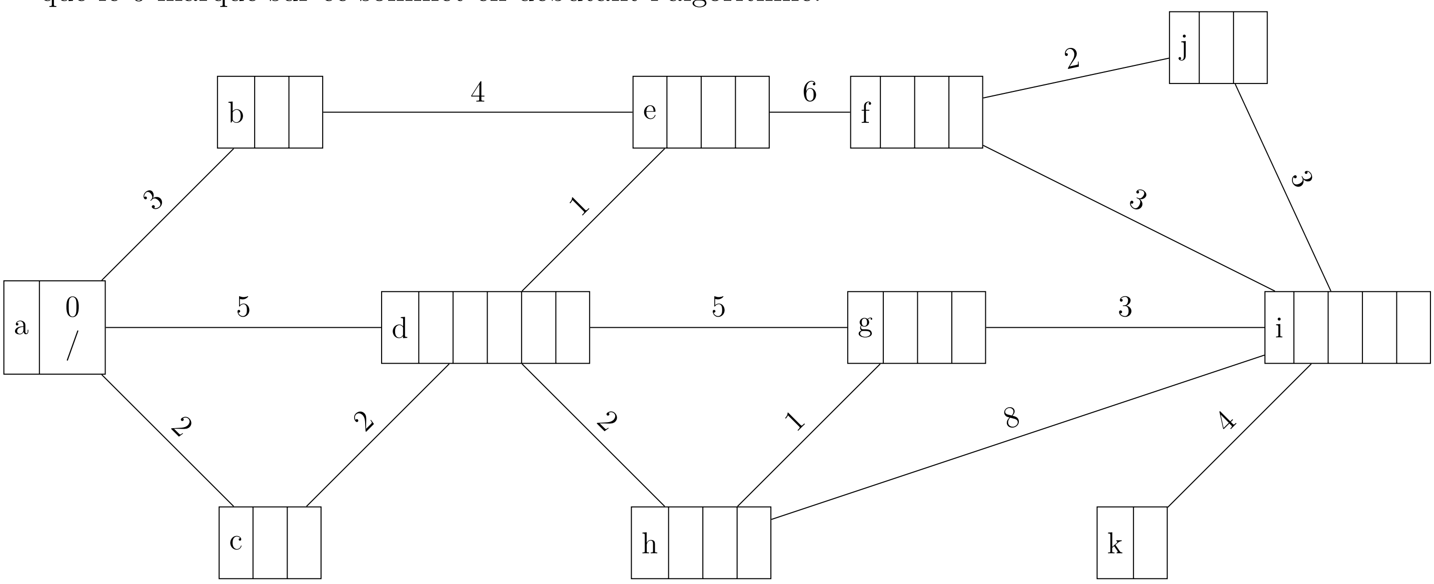

La distance (provisoire) minimale parmi les blancs est réalisée par c. On la sélectionne, on la grise et on met à jour les distances provisoires de ses voisines blanches, en indiquant que cette mise à jour s'est faite à partir de la ville c (D(d] est modifié car D[c] + longueur(c,d) < D[d], on met donc à jour également la provenance) :




La distance (provisoire) minimale parmi les blancs est maintenant réalisée par b. On la sélectionne, on la grise et on met à jour les distances provisoires de ses voisines blanches, en indiquant que cette mise à jour s'est faite à partir de la ville b (seule e est concernée ici) :




**Exercice 14 –** On veut continuer les étapes jusqu'à la ville i.
Reproduire entièrement le graphe pour chaque étape ou effacer et réécrire serait fastidieux et peu pratique. On va donc reproduire le graphe en ajoutant quelques cases vides pour chaque sommet. Pour un sommet donné, on ajoutera un nombre de cases vides égal au degré de ce sommet (car on est certain que l'algorithme ne modifiera jamais la marque d'un sommet de degré d plus de d fois). Pour le sommet de départ, une seule case suffit puisqu'il est certain que l'on ne peut pas faire mieux que le 0 marqué sur ce sommet en débutant l'algorithme.

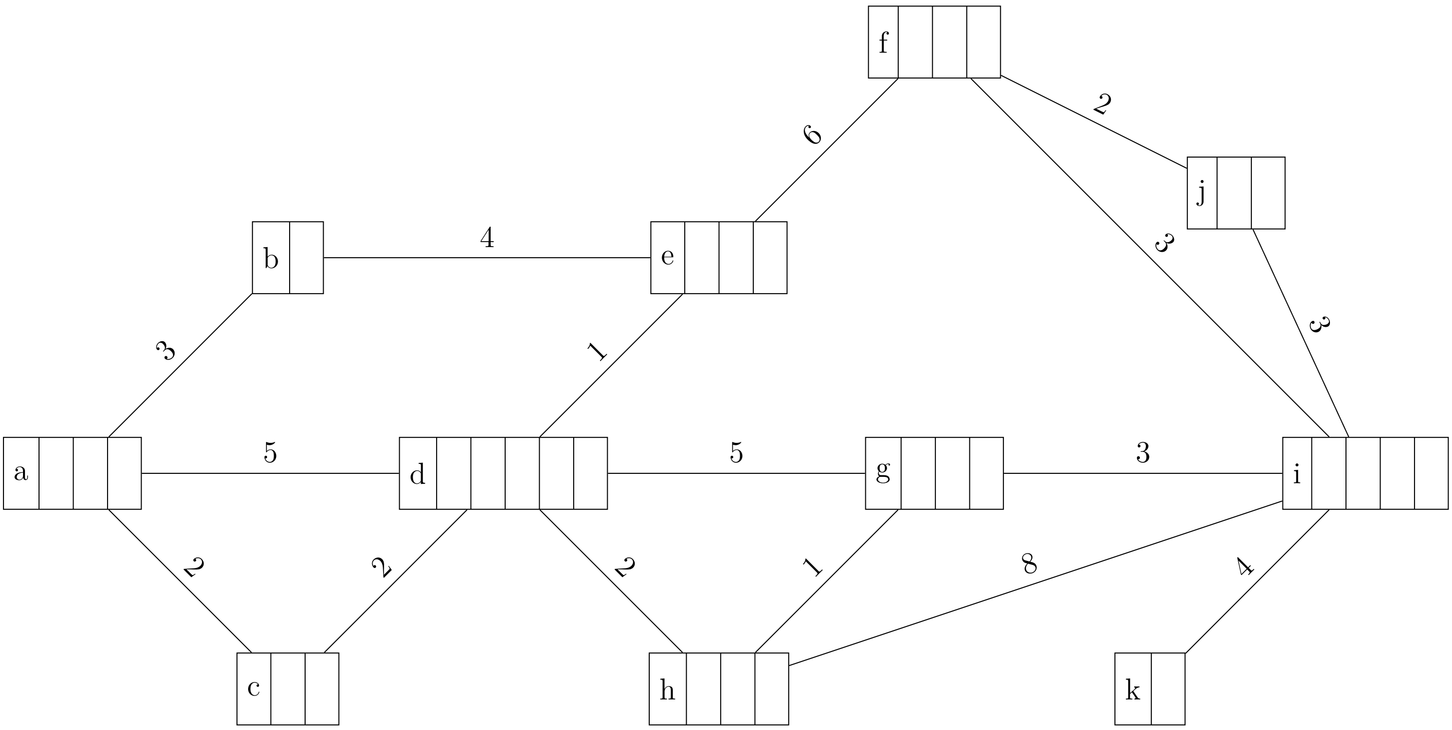



Déroulez l'algorithme de Dijkstra sur ce support.

**Exercice 15 –** Lorsque la ville i a été grisée, on peut arrêter : la ville i, qui était notre cible, ne sera plus modifiée.
On admet que l'algorithme ainsi déroulé nous a donné la distance la plus courte de a à i. Voyez-vous comment exploiter le résultat de cet algorithme pour donner un itinéraire de a à i réalisant la distance 10 ?

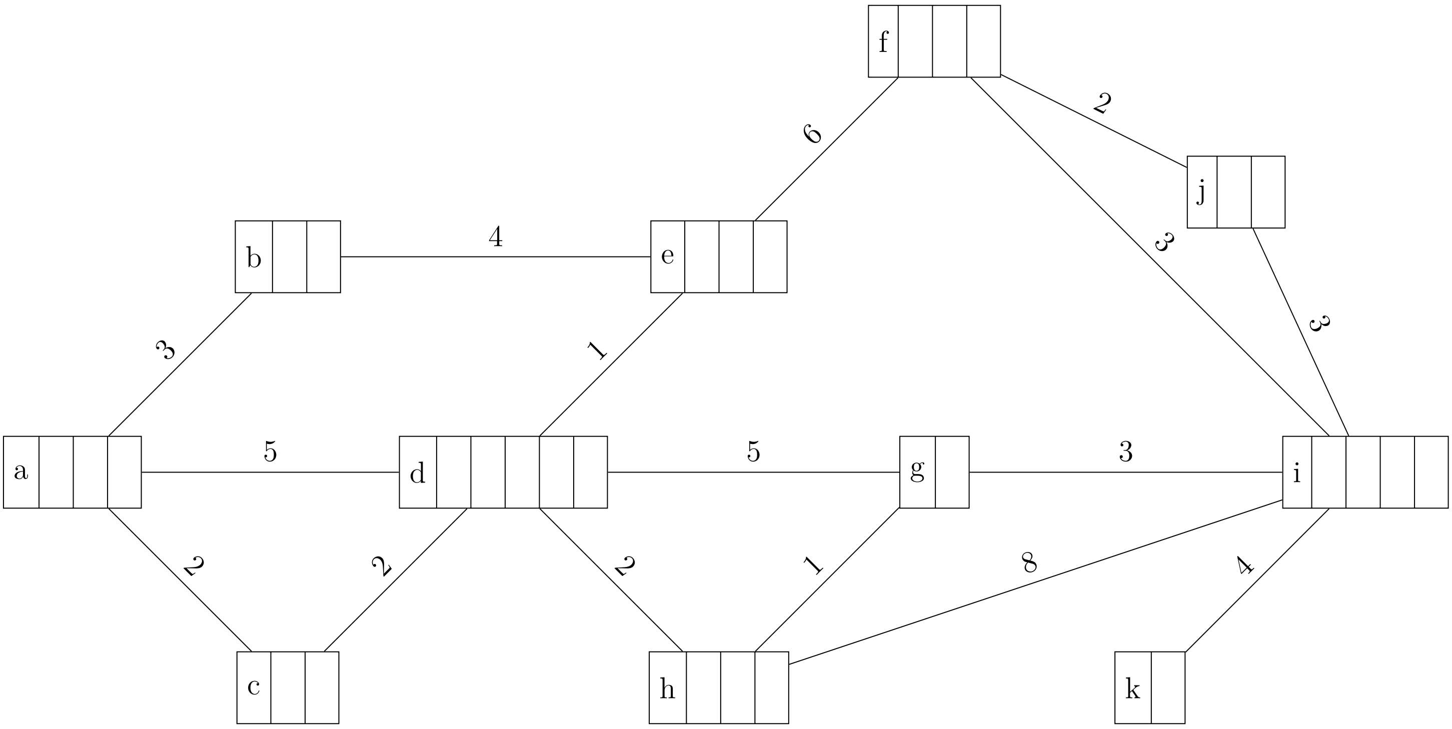
**Résolution.**
Le chemin le plus court pour aller de la ville a à la ville i est donc de longueur 10. Pour connaître ce chemin, il suffit de remonter les villes indiquées par le tableau P à partir de la ville i : g, h, d, c, a. Le chemin le plus court de a à i est donc a-c-d-h-g-i. □

**Exercice 16 –** 1. Calculer les distances minimales à partir du sommet b pour le graphe ci-dessous :



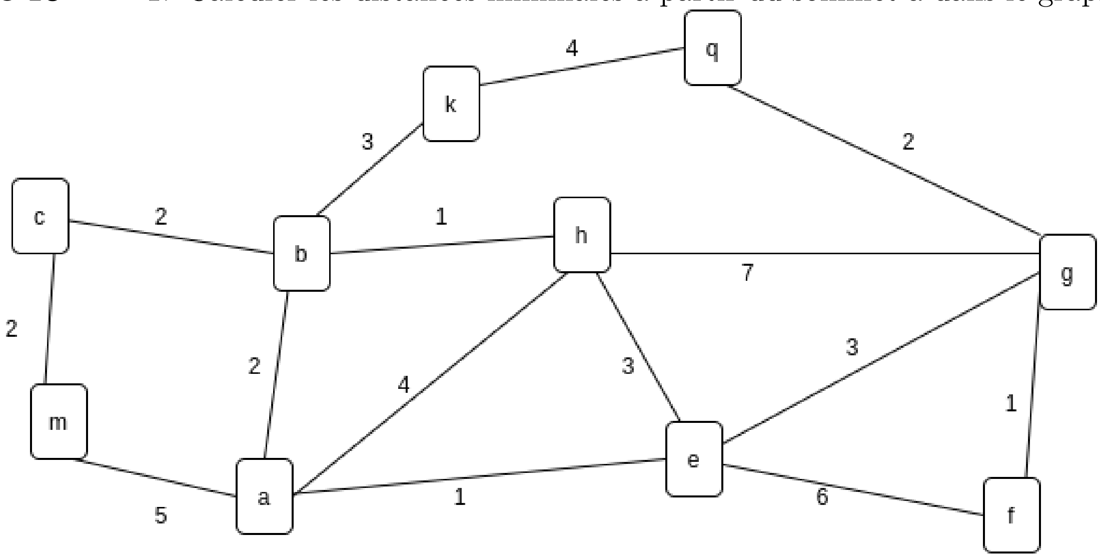

2. Donner un plus court chemin de b à k.

**Exercice 17 –** 1. Calculer les distances minimales à partir du sommet g pour le graphe ci-dessous :




2. Donner un plus court chemin de g à a.

**Exercice 18 –** 1. Calculer les distances minimales à partir du sommet a dans le graphe suivant :




2. Donner un plus court chemin de a à g.

**Exercice 19 –** 1. Calculer les distances minimales à partir du sommet f pour le graphe de l'exercice 18.

2. Donner un plus court chemin de f à c.

**Exercice 20 –** 1. Calculer les distances minimales à partir du sommet c dans le graphe de l'exercice 18.

2. Donner un plus court chemin de c à g.

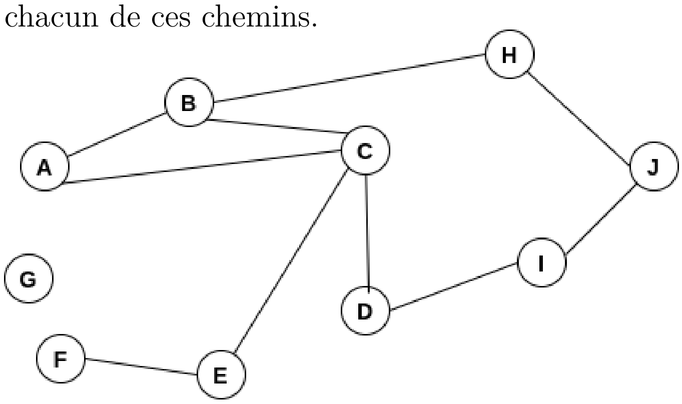
# 7 Distance entre sommets

## 7.1 Chemin entre deux sommets

**Définition.**
Un chemin entre deux sommets X et Y est une séquence de sommets X, S1, S2, S3, ..., Sk, Y tels que X est voisin de S1, S1 est voisin de S2, S2 est voisin de S3, ..., Sk est voisin de Y.
En d'autres termes, on peut penser le graphe comme une carte avec des sentiers (= arêtes) entre des lieux (= sommets). Un chemin entre deux sommets est une succession de lieux et sentiers reliant les deux sommets.

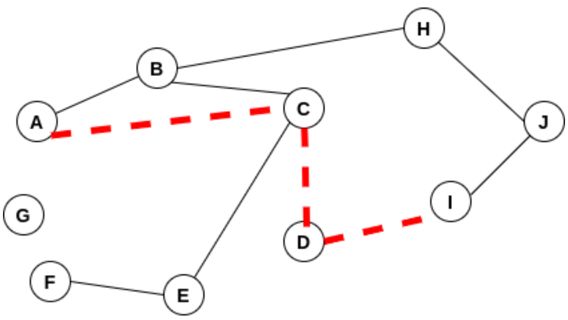
**Définition.**
La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes composant ce chemin.
En d'autres termes, dans un graphe (sans indication sur les arêtes) on peut considérer que chaque arête représente un sentier de longueur 1. La longueur d'un chemin entre deux sommets est alors la somme des longueurs des sentiers reliant les deux extrémités.

**Exercice 21 –** Sur le graphe ci-dessous, identifier les chemins de A à I et donner la longueur de chacun de ces chemins.

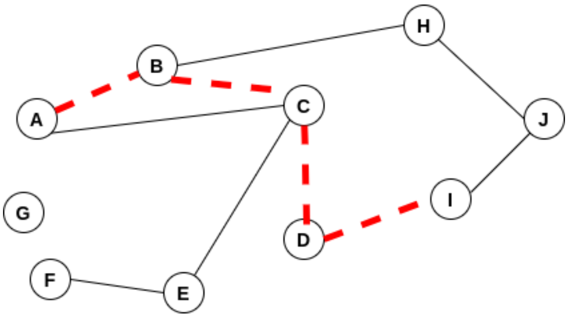



**Résolution.**

1. Le chemin A-C-D-I (chemin de longueur 3, c'est à dire comportant 3 arêtes)

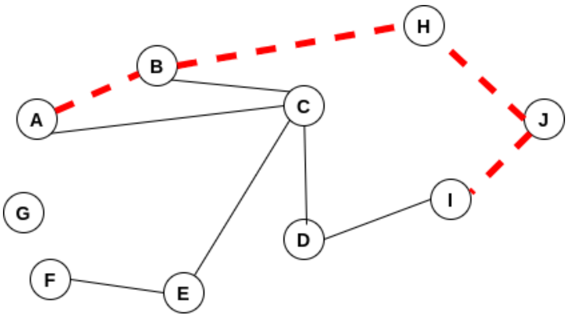


2. Le chemin A-B-C-D-I :

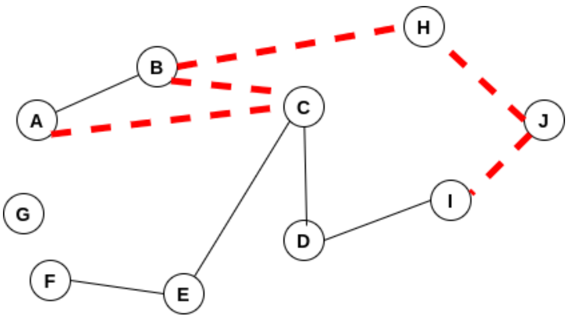



Ce chemin A-B-C-D-I est de longueur 4.

3. Le chemin A-B-H-J-I (de longueur 4) :




4. Le chemin A-C-B-H-J-I (chemin de longueur 5) :




Remarque : on peut aussi définir des chemins dans lesquels on trouve des «circuits fermés » comme le chemin A-B-C-A-B-C-A-B-C-D-I (chemin de longueur 10). Dans la suite, nous éviterons systématiquement ce type de chemins qui utilise plusieurs fois une même arête ou qui passe plusieurs fois par un même sommet, car les chemins d'un sommet à un autre qui nous intéresseront seront les chemins les plus courts entre ces deux sommets. □

## 7.2 Distance entre deux sommets

**Définition.**
La distance entre deux sommets est la longueur du plus court chemin reliant ces deux sommets.

**Exercice 22 –** Dans le graphe de l'exercice 21 :

1. Quelle est la distance entre les sommets A et I ?
2. Quelle est la distance entre les sommets F et H ?
3. Quelle distance pourrait-on définir entre les sommets A et G ?

**Résolution.**

1. Nous avons déjà énuméré les chemins de A à I. Le plus court des chemins trouvés est de longueur 3. La distance entre A et I est donc égale à 3 (notation : dist(A,I) = 3), et cette distance est obtenue avec le chemin A-C-D-I.
2. De F à H, on identifie les divers chemins : F-E-C-B-H (longueur 4), F-E-C-D-I-J-H (longueur 6), F-E-C-A-B-H (longueur 5). Le plus court chemin est de longueur 4. La distance de F à H est donc égale à 4 (dist(F,H) = 4) et cette distance est obtenue par le chemin F-E-C-B-H.
3. Il n'est pas possible d'aller de A en G puisqu'aucune arête ne relie G. Dans ce cas, on parlera de distance infinie entre A et G. On note : dist(A, G)= $\infty$. □

## 7.3 Le petit monde de Milgram

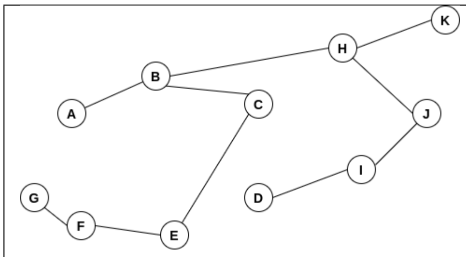
Stanley Milgram (1933-1984) est un psychologue social américain.
Le principe du « petit monde de Milgram » est l'idée que, dans un réseau social, la distance entre deux sommets est toujours assez faible.
Plusieurs expériences tendent à montrer qu'entre deux individus quelconques la distance la plus fréquemment observée est de l'ordre de 5 ou 6.
Il ne faut donc pas se laisser impressionner par quelqu'un affirmant qu'il connaît ou qu'il est en relation avec des personnes proches d'une célébrité... les résultats cités ci-dessus montrent que c'est plutôt fréquent !

## 7.4 Diamètre d'un graphe

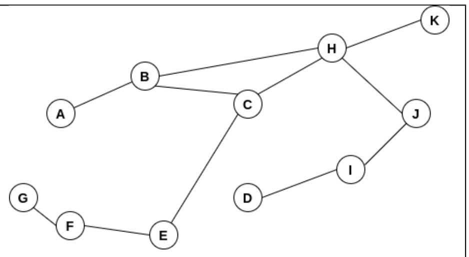
**Définition.**
Le diamètre d'un graphe est la plus grande des distances entre deux sommets de ce graphe.

Dans un réseau social, le diamètre du graphe donne donc le plus grand nombre d'intermédaires possibles entre deux personnes. Le principe du "petit monde de Milgram" tend à prouver que ce nombre est plutôt faible dans un réseau social.

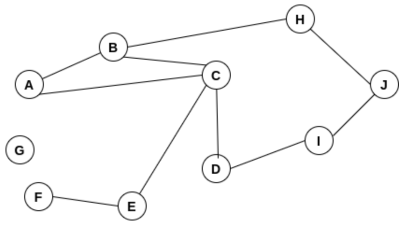
**Exercice 23 –** Pour chacun des graphes ci-dessous, pour tous les couples de sommets, donner la distance entre les éléments de ce couple. En déduire le diamètre du graphe dans chaque cas.



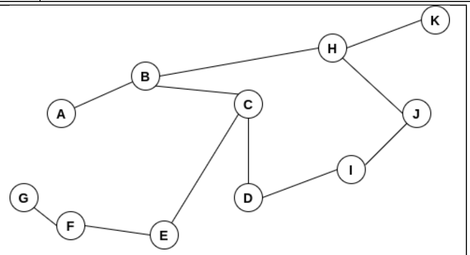

Graphe 1




Graphe 2




Graphe 3




Graphe 4

**Résolution.**

Graphe 1 – On remplit le tableau des distances (on ne remplit que le triangle supérieur, le triangle inférieur étant le même par symétrie par rapport à la diagonale «ligne = colonne»)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| B | | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| C | | | 0 | 5 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| D | | | | 0 | 6 | 7 | $\boxed{8}$ | 3 | 1 | 2 | 4 |
| E | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 4 |
| F | | | | | | 0 | 1 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| G | | | | | | | 0 | 5 | 7 | 6 | 6 |
| H | | | | | | | | 0 | 2 | 1 | 1 |
| I | | | | | | | | | 0 | 1 | 3 |
| J | | | | | | | | | | 0 | 2 |
| K | | | | | | | | | | | 0 |

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 8. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet D au sommet G.

Graphe 2 – Le graphe est très proche du précédent. Mais une arête a été ajoutée entre les sommets C et H : cela raccourcit un certain nombre de distances.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| B | | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| C | | | 0 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| D | | | | 0 | 5 | 6 | $\boxed{7}$ | 3 | 1 | 2 | 4 |
| E | | | | | 0 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| F | | | | | | 0 | 1 | 3 | 5 | 4 | 4 |
| G | | | | | | | 0 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| H | | | | | | | | 0 | 2 | 1 | 1 |
| I | | | | | | | | | 0 | 1 | 3 |
| J | | | | | | | | | | 0 | 2 |
| K | | | | | | | | | | | 0 |

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 7. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet D au sommet G.

Graphe 3 – Le sommet G n'est pas atteignable depuis les autres sommets. Le tableau des distances fera donc nécessairement apparaître des distances infinies. Le diamètre de ce graphe est donc $\infty$.

Graphe 4 – On a ici encore un graphe très proche du graphe 1 mais avec une arête ajoutée entre les sommets C et D. Le tableau des distances :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| B | | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| C | | | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| D | | | | 0 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| E | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| F | | | | | | 0 | 1 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| G | | | | | | | 0 | 5 | 5 | $\boxed{6}$ | $\boxed{6}$ |
| H | | | | | | | | 0 | 2 | 1 | 1 |
| I | | | | | | | | | 0 | 1 | 3 |
| J | | | | | | | | | | 0 | 2 |
| K | | | | | | | | | | | 0 |

D'après ce tableau, le diamètre du graphe est 6. Ce diamètre est obtenu comme distance du sommet G au sommet J, mais aussi comme distance de G à K.

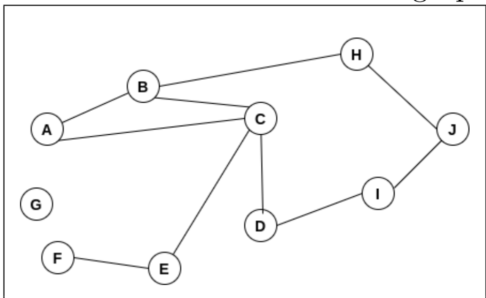
# 8 Excentricité

## 8.1 Ecartement

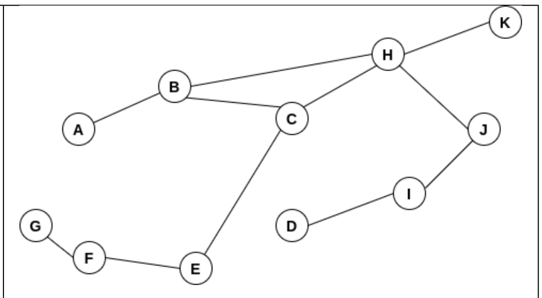
**Définition.**
Soit X un sommet d'un graphe. On considère toutes les distances dist(X,S) de X à un quelconque autre sommet du graphe. La plus grande de ces distances est nommée excentricité (ou écartement) du sommet X.
Pour déterminer l'excentricité de X, on cherche donc à déterminer un sommet Z le plus éloigné de X. La distance de X à Z est l'excentricité de X.

Les expériences confirmant « le petit monde de Milgram » semblent donc établir que, dans le graphe associé à un réseau social, les excentricités des sommets sont assez petites.

**Exercice 24 –** Pour les deux graphes ci-dessous



Graphe 1



Graphe 2

donner l'excentricité de chacun des sommets A, F, C, G.

**Résolution.**

Graphe 1– On dresse le tableau (d'une seule ligne) des distances du sommet considéré aux autres sommets.

(a) Sommet A.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | $\infty$ | 2 | 3 | 3 |

La distance de A à un autre sommet la plus grande est la distance de A à G. L'excentricité de A est donc donnée par cette distance dist(A, G). L'excentricité (ou écartement) de A est $\infty$.

(b) Sommet F.
Comme dist(F,G) $=\infty$, on aura de même une excentricité égale à $\infty$ pour le sommet F.

(c) Même remarque pour le sommet C : excentricité(C) $=\infty$.

(d) De façon analogue, excentricité(G) $=\infty$.

Graphe 2– Pour le second graphe, il n'y a pas de sommet isolé, on n'aura donc pas d'excentricité infinie. On dresse les tableaux des distances pour chacun des sommets demandés.

(a) Sommet A.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 |

D'après ce tableau, l'excentricité de A est égale à 5. Elle est réalisée par la distance de A à D et par la distance de A à G.

(b) Sommet F.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | 4 | 3 | 2 | $\boxed{6}$ | 1 | 0 | 1 | 3 | 5 | 4 | 4 |

D'après ce tableau, l'excentricité de F est égale à 6. Elle est réalisée par la distance de F à D.

(c) Sommet C.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | 2 | 1 | 0 | $\boxed{3}$ | 1 | 2 | $\boxed{3}$ | 1 | $\boxed{3}$ | 2 | 2 |

D'après ce tableau, l'excentricité de C est égale à 3. Elle est réalisée par exemple par la distance de C à D.

(d) Sommet G.

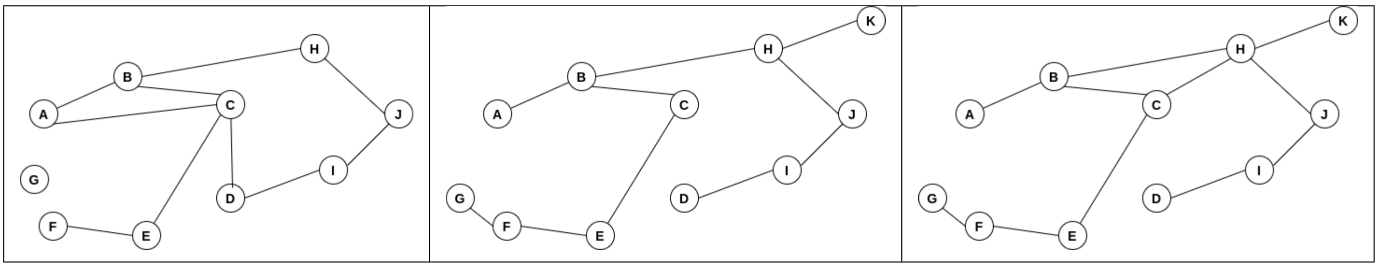
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| G | 5 | 4 | 3 | $\boxed{7}$ | 2 | 1 | 0 | 4 | 6 | 5 | 5 |

D'après ce tableau, l'excentricité de G est égale à 7. Elle est réalisée par la distance de G à D.

## 8.2 Centre et rayon

**Définition.**
On appelle **centre** d'un graphe tout sommet ayant une excentricité minimale.
On appelle **rayon** d'un graphe l'excentricité minimale.

**Exercice 25 –** 1. Pour chacun des graphes ci-dessous, déterminer le rayon et les centres du graphe




2. Supposons que les graphes précédents représentent des cartes routières, toutes les routes de longueur 1. On doit placer un centre de secours et un seul. Où le place-t-on ?
3. Supposons que les graphes précédents soient des graphes représentant des liens d'« amitié » sur un réseau social. Que dire d'un abonné de ce réseau qui est centre du graphe ? Citer des situations sur des réseaux où une personne aurait intérêt à être centre du graphe.

**Résolution.**

1. Graphe 1.

On commence par déterminer, selon la même méthode que l'exercice précédent, les excentricités de chaque sommet.

On obtient :

| **Sommets** | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Excentricités** | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

Le rayon est l'excentricité minimale. Les excentricités étant toutes $\infty$, le rayon est $\infty$. Chaque sommet est un centre.

2. Les deux autres graphes sont connexes (ce qui signifie que l'on peut rejoindre tout sommet à partir de n'importe quel sommet). La notion de rayon et de centre est évidemment plus consistante dans ce cas de figure.

(a) Graphe 2.

Le tableau des excentricités est le suivant :

| **Sommets** | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Excentricités** | 5 | 4 | 5 | 8 | 6 | 7 | 8 | 5 | 7 | 6 | 6 |

L'excentricité minimale est égale à 4 (excentricité de B). Le sommet B est donc un centre du graphe.

(b) Graphe 3.

Pour déterminer les excentricités, on a d'abord besoin de déterminer les distances d'un sommet à un autre. On donne toutes les distances de sommet à sommet dans la matrice des distances ci-dessous :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| B | 1 | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| C | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| D | 5 | 4 | 4 | 0 | 5 | 6 | 7 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| E | 3 | 2 | 1 | 5 | 0 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 |
| F | 4 | 3 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | 3 | 5 | 4 | 4 |
| G | 5 | 4 | 3 | 7 | 2 | 1 | 0 | 4 | 6 | 5 | 5 |
| H | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| I | 4 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| J | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 0 | 2 |
| K | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 0 |

Rappel la distance d'un sommet à un autre est la longueur du **plus court** chemin reliant ces deux sommets.

Maintenant que nous avons les distances, nous pouvons en déduire les excentricités. L'excentricité d'un sommet est la plus grande **distance** de ce sommet à un autre. On voit donc que l'on peut facilement lire les excentricités ligne par ligne dans la matrice précédente : l'excentricité de A est la plus grande valeur lue dans la ligne des distances correspondant à A.

On peut compléter la matrice par une colonne des excentricités :

| **Sommets** | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Excentricités** | 5 | 4 | 4 | 7 | 5 | 6 | 7 | 4 | 6 | 5 | 5 |

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | Excentricités |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 3 | 3 | excentricité(A) = 5 |
| B | 1 | 0 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | excentricité(B) = 4 |
| C | 2 | 1 | 0 | 4 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | excentricité(C) = 4 |
| D | 5 | 4 | 4 | 0 | 5 | 6 | 7 | 3 | 1 | 2 | 4 | excentricité(D) = 7 |
| E | 3 | 2 | 1 | 5 | 0 | 1 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | excentricité(E) = 5 |
| F | 4 | 3 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | 3 | 5 | 4 | 4 | excentricité(F) = 6 |
| G | 5 | 4 | 3 | 7 | 2 | 1 | 0 | 4 | 6 | 5 | 5 | excentricité(G) = 7 |
| H | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 0 | 2 | 1 | 1 | excentricité(H) = 4 |
| I | 4 | 3 | 3 | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 0 | 1 | 3 | excentricité(I) = 6 |
| J | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 1 | 0 | 2 | excentricité(J) = 5 |
| K | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 | 0 | excentricité(K) = 5 |

L'excentricité minimale est égale à 4 (excentricité de B, de C, de H). Les sommets B, C et H sont des centres du graphe.

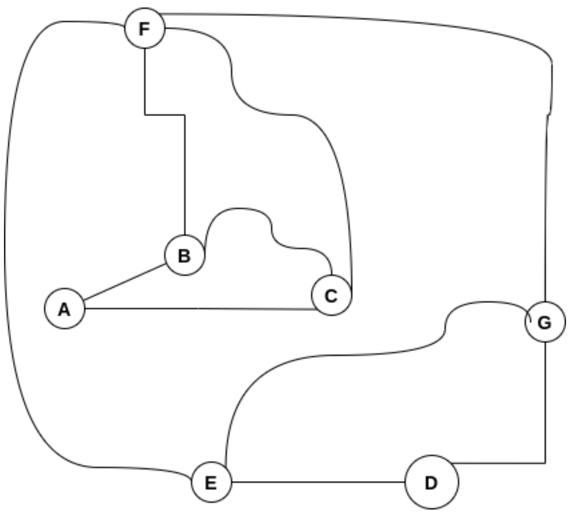
3. En plaçant le centre de secours sur un centre du graphe, on le place en un sommet qui permet d'atteindre tous les sommets assez rapidement. En plaçant les secours en dehors d'un centre du graphe, on aurait au moins une distance plus longue entre cet emplacement et un sommet que les distances à réaliser depuis un centre du graphe.
4. En terme de réseau social, le centre est celui qui a le moins d'intermédiaires pour contacter tout le monde. Propriété évidemment intéressante pour un influenceur, pour une entreprise utilisant le réseau pour sa publicité, …

**Exercice 26 –** Dans un réseau social, les liens (non orientés) entre les personnes A, B, C, D, E, F, G sont donnés par le tableau d'adjacence ci-dessous (les cases vides sont des 0) :

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 1 | 1 | | | | |
| B | 1 | | 1 | | | 1 | |
| C | 1 | 1 | | | | 1 | |
| D | | | | | 1 | | 1 |
| E | | | | 1 | | 1 | 1 |
| F | | 1 | 1 | | 1 | | 1 |
| G | | | | 1 | 1 | 1 | |

Donner une représentation graphique de ce graphe telle que les sommets centre soient centrés dans la représentation graphique (une telle représentation permet de mettre en évidence cette propriété de centre).

**Résolution.**
On commence par réaliser une représentation «quelconque» :




On dresse la matrice des distances ( pour tout couple de sommets (X,Y), on indique la longueur du plus court chemin entre ces deux sommets) :

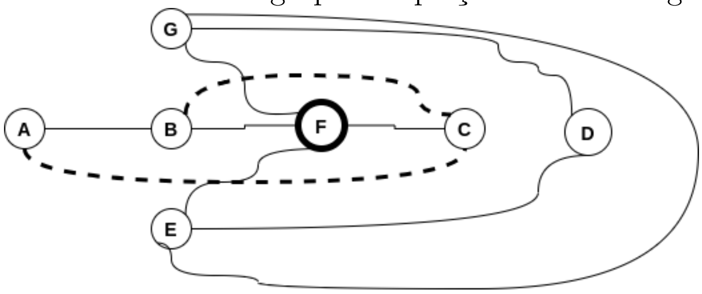
| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 1 | 1 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| **B** | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| **C** | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 | 2 |
| **D** | 4 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| **E** | 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| **F** | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| **G** | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |

On en déduit le tableau des excentricités (en prenant le maximum dans chaque colonne de la matrice des distances) :

| **Sommets** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** | **G** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Excentricités** | 4 | 3 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 |

On en déduit le rayon (en prenant la valeur minimale du tableau des excentricités). Le rayon est 2 et F est un centre.

On dessine alors le graphe en plaçant le centre «géométriquement » au centre… :



# 9 Quelques algorithmes

Dans ce paragraphe, nous abordons quelques algorithmes appliqués à des graphes. Les algorithmes utilisés par les entreprises de réseaux sociaux sont en général bien plus complexes que ceux présentés ici mais cela vous donne une idée de l'intérêt du point de vue « graphe » lorsqu'on doit étudier un réseau.

## 9.1 Nombre d'arêtes

1. Dessiner un graphe G (non orienté) de sommets A, B, C, D, E, F dans lequel (a) A est adjacent à chacun des autres sommets. (b) B est voisin de D et E. (c) C et D sont voisins.
2. On considère la fonction ci-dessous prenant en paramètre un graphe non orienté quelconque.

```
fonction f(graphe):
    compteur ← 0
    Pour chaque sommet s du graphe:
        pour chaque voisin de s:
            ajouter 1 à compteur
    renvoyer compteur
```

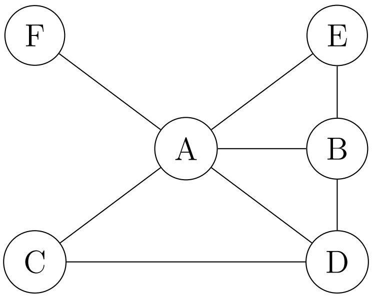
   (a) Quelle est la valeur de f(G) ?
   (b) Comment peut-on modifier la fonction f pour qu'elle renvoie la taille du graphe donné en entrée ? Expliquer.
3. Taille d'un graphe complet.

**Définition.**
On appelle graphe complet un graphe (non orienté) dans lequel tout sommet est relié à tout autre.

   (a) Dessiner un graphe complet d'ordre 3. Quelle est sa taille ?
   (b) Dessiner un graphe complet d'ordre 4. Quelle est sa taille ?
   (c) Quelle est la taille d'un graphe complet à $n$ sommets ?

**Résolution.**

1. Représentation du graphe :



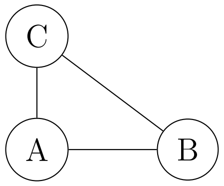
2. (a) On déroule l'algorithme pas à pas.
   i. On commence par initialiser le compteur à 0.
   ii. On aborde la boucle «Pour chaque sommet s» :
      - Pour s = A : on exécute la boucle «pour chaque voisin de s» (ici «pour chaque voisin de A»). Cette boucle consiste à ajouter 1 au compteur pour chaque voisin de A. On ajoute donc en fait à compteur le nombre de voisins de A, c'est à dire 5. compteur a donc maintenant pour valeur 5.
      - Pour s = B : on exécute la boucle «pour chaque voisin de s» (ici «pour chaque voisin de B»). Cette boucle consiste à ajouter 1 au compteur pour chaque voisin de B. On ajoute donc en fait à compteur le nombre de voisins de B, c'est à dire 3. compteur a donc maintenant pour valeur 8.
      - Pour s = C : compteur prend la valeur 10 après ce tour de boucle.
      - Pour s = D : compteur prend la valeur 13 après ce tour de boucle.
      - Pour s = E : compteur prend la valeur 15 après ce tour de boucle.
      - Pour s = F : compteur prend la valeur 16 après ce tour de boucle.

      Au final, compteur a pour valeur 16.

   (b) - La fonction a renvoyé le double du nombre d'arêtes du graphe. Et ce sera le cas pour tout graphe non orienté donné en entrée à la fonction $f$. En effet :
         — Pour chaque sommet s du graphe, on ajoute le nombre d'arêtes issues de s à compteur.
         — De cette façon chaque arête est comptée exactement deux fois. Par exemple, l'arête reliant A et B est comptée une première fois comme arête issue de A puis une seconde fois comme arête issue de B : elle est donc comptée exactement deux fois.
       - Comme f renvoie le double de la taille, il suffit de diviser par deux la valeur renvoyée pour obtenir la taille du graphe. On obtient ainsi la fonction taille ci-dessous :

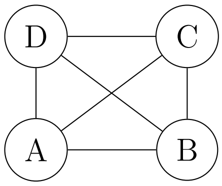
```
fonction taille(graphe):
    compteur ← 0
    Pour chaque sommet s du graphe:
        pour chaque voisin de s:
            ajouter 1 à compteur
    renvoyer compteur/2
```

3. Taille d'un graphe complet.
   (a) Dessin d'un graphe complet d'ordre 3 :




La taille est égale à 3.

(b) Dessin d'un graphe complet d'ordre 4 :




La taille est 6.

(c) Remarquons tout d'abord que chaque sommet est de degré $n-1$ dans un graphe complet à $n$ sommets (puisque chaque sommet est rélié à chacun des $n-1$ autres sommets).

Appliquons la fonction `taille` définie plus haut.

On initialise un compteur à 0.

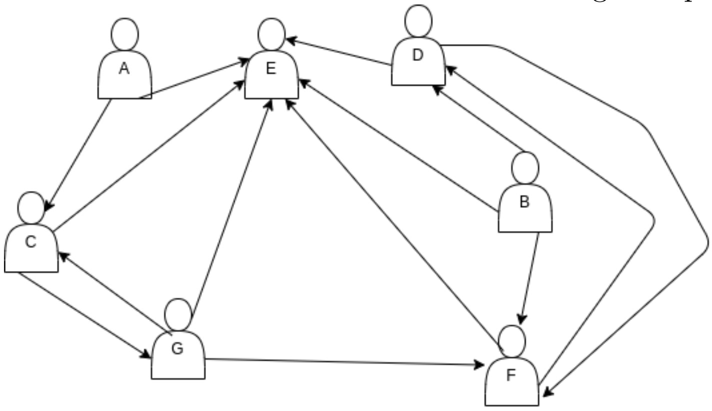
i. Pour chaque sommet s du graphe, on ajoute son nombre de voisins (c'eest à dire $n-1$) à compteur.

ii. Comme il y a $n$ sommets, le compteur vaut $n(n-1)$ à la fin de la boucle.

iii. Enfin, la taille est compteur/2, soit $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$ □

## 9.2 La star du réseau

Dans un réseau social, on a la possibilité de « suivre » un autre abonné du réseau. Ci-dessous, une flèche d'un sommet X vers un sommet Y signifie que X suit Y.




Dans un réseau, on appelle star une personne suivie par tous mais ne suivant personne.

1. Le réseau ci-dessus présente-t-il une star ?
2. Combien de flèches faudrait-il retirer pour qu'il n'y ait plus de star dans le réseau ?
3. Peut-on ajouter des flèches de façon à ce qu'il y ait une seconde star dans le réseau ? **Justifier**.
4. Combien peut-il y avoir de stars dans un réseau ?
5. Voici un algorithme :

```
Pour chaque abonné p du réseau :
    test ← vrai
```

```
    Pour chaque abonné q différent de p:
        si p suit q alors test ← faux
        si q ne suit pas p alors test ← faux
    Si test a pour valeur vrai alors afficher p
```

Quel sera le résultat de cet algorithme appliqué au réseau ci-dessus ? De façon générale, quel est le rôle de l'algorithme ?

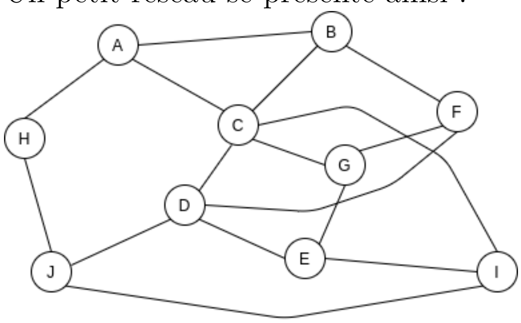
**Résolution.**

1. E est une star du réseau.
2. Une seule flèche suffit. On retire une flèche arrivant sur E : ce n'est plus une star (et aucun autre sommet ne l'est).
3. Non. En effet soit Y une star. Prenons X un autre des sommets. X suit Y ( X⟶Y) puisque Y est une star, donc X suit au moins une personne et n'est pas une star. Ainsi si Y est une star, aucun autre sommet ne peut être star.
4. D'après ce qui précède, il y a au plus une star dans un réseau.
5. 
```
Pour chaque abonné p du réseau :
    test ← vrai
    Pour chaque abonné q différent de p:
        si p suit q alors test ← faux
        si q ne suit pas p alors test ← faux
    Si test a pour valeur vrai alors afficher p
```

   Cet algorithme affiche le nom du sommet star si le graphe contient une star, et n'affiche rien si le graphe ne présente pas de star.

## 9.3 Amis communs

Un petit réseau se présente ainsi :




1. Remplir le tableau suivant en appliquant l'algorithme ci-dessous. Les cases vides actuelles du tableau sont supposées contenir un 0 au départ de l'algorithme.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | | |
| J | | | | | | | | | | |

```
Pour chaque personne i du réseau :
    Pour chaque personne j du réseau :
        Pour chaque personne k du réseau :
            si k est ami avec i :
                si k est ami avec j :
                    ajouter 1 à la case (ligne,colonne)=(i,j)
```

2. Remplir de même le tableau suivant avec l'algorithme ci-dessous :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | | | | | |
| B | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | |
| G | | | | | | | | | | |
| H | | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | | | | |
| J | | | | | | | | | | |

```
Pour chaque personne k du réseau :
    Pour chaque ami i de k :
        Pour chaque ami j de k :
            ajouter 1 à la case (i,j)
```

3. Vous avez normalement constaté que les deux algorithmes ont rempli la grille de la même façon.
   (a) Quelle est la signification des nombres obtenus dans les cases de la diagonale (cases A-A, B-B, ...) ?
   (b) Quelle est la signification des nombres obtenus dans les autres cases ?
   (c) L'un des deux algorithmes vous paraît-il plus rapide ? Expliquer pourquoi il demande moins de calculs.

Les progrès des ordinateurs, téléphones, etc... sont autant dus à l'amélioration des algorithmes au fur et à mesure des découvertes par les chercheurs qu'à l'amélioration matérielle. Les modifications pour augmenter la rapidité de calcul sont bien sûr en général beaucoup plus complexes que celles observées ci-dessus.

**Résolution.**

On constate que les deux algorithmes comptent, pour chaque couple (X,Y) de sommets le nombre de voisins communs.

Lorsque X=Y, ce nombre est tout simplement le nombre de voisins de X.
Le début de la matrice est donc ce qui suit pour chacun des deux algorithmes :

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| B | 1 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| C | 1 | 1 | 5 | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| D | 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| E | 0 | 0 | 3 | | | | | | | |
| F | 1 | 0 | 3 | | | | | | | |
| G | 1 | 2 | 0 | | | | | | | |
| H | 0 | 1 | 1 | | | | | | | |
| I | 1 | 1 | 0 | | | | | | | |
| J | 1 | 0 | 2 | | | | | | | |

Le second algorithme demande un peu moins de calcul, car il ne considère pas tous les sommets du graphe dans les trois boucles : il ne considère que les voisins du sommet de la boucle la plus externe dans les deux boucles internes. □